目　　录

第一章　方程的导出和分类

在微积分出现后不久，就开始了偏微分方程的研究。由于许多物理的基本规律的数学形式都是偏微分方程，所以，这些来自物理的偏微分方程就是常说的数学物理方程。三类基本的二阶偏微分方程是

波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0$$

热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0$$

拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

我们将开始研究这些方程。研究的一般程序是，(1)根据物理问题的有关定律建立相应的数学模型；(2)对数学模型进行求解；(3)对所得解检验鉴定其正确性。

§1.1　方程的导出和定解条件

1. 波动方程

1）弦振动方程

在数学物理方程中最重要的问题之一是拉紧的弦的振动问题。这不仅是由于它简单，更重要的是它经常出现许多数学物理的分支中，所以在偏微分方程理论中把它当作为一个典型的例子，考

察一长为 l 两端固定的拉紧的弦。

为弦振动现象建立数学模型，首先要了解它服从的基本物理规律，并作出必要的符合实际的简化。弦振动是一个力学系统，所以它的运动应符合牛顿运动定律，故可对它作如下的简化假设：

设弦未受扰动时的平衡位置是在 x 轴上，弦上各点的位移发生在 (x,u) 平面内垂直于 x 轴方向上，以 $u(x,t)$ 表示弦上点 x 处在时刻 t 的位置。如图 1-1，假设：

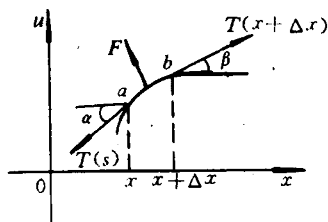


图 1-1

(1) 弦是柔软且有弹性的(即它不抗弯曲)。因此，在任何时刻弦的张力总沿着弦的切线方向。

(2) 弦的每一段在振动过程中都不伸长，根据虎克定律，张力是常数。

(3) 弦的重量与张力相比很小。

(4) 弦只有微小的横向振动。这并不是说 $u(x,t)$ 很小，而是设 $u_x(x,t)$ 很小。从而 $u_x^2(x,t)$ 可以略去不计。

建立数学模型时，这种简化假设是必须的，做什么样的假设视要解决的问题的性质和所需的精确度而定，这是一个实验与实践的问题，而不是理论问题。

建立数学模型的下一步是分析弦上一小段 $\widehat{ab}$，称为“弦微元”上的作用力，它们有

作用在 a 点处的张力 $T(x)$

作用在 b 点处的张力 $T(x+\Delta x)$

作用在 $\widehat{ab}$ 上的外力 $F(\xi,t)\Delta x$，其中 $F(\xi,t)$ 是在 $[x,x+\Delta x]$ 内某点 ξ 处的力密度。于是沿水平方向的分力为

$$T(x+\Delta x)\cos\beta - T(x)\cos\alpha = T\left[\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\beta}} - \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}\right]$$

$$= T\left[\frac{1}{\sqrt{1+u_x^2(b)}} - \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2(a)}}\right] = 0$$

沿 u 方向的分力为

$$T(x+\Delta x)\sin\beta - T(x)\sin\alpha + F(\xi,t)\Delta x = \rho\Delta x\frac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial t^2}$$

由于微小振动

$$\sin\alpha \approx \mathrm{tg}\alpha = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x},\ \sin\beta \approx \mathrm{tg}\beta = \frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}$$

故有

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial t^2} = T\left[\frac{\partial u(x+\Delta\backslash\%\mathrm{x},\mathrm{t})}{\partial \mathrm{x}} - \frac{\partial \mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{t})}{\partial \mathrm{x}}\right] + \mathrm{F}(\xi,\mathrm{t})\Delta\mathrm{x}$$

应用微分中值定理即得

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial t^2}$$

$$= T\frac{\partial^2 u(x+\tau\Delta x,t)}{\partial x^2}\Delta x + F(\xi,t)\Delta x \qquad (0<\tau<1)$$

将上式两端除以 $\rho\Delta x$，令 $\Delta x\to 0$，有 $\xi\to x,\bar{x}\to x$，取极限得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad (1.1.1)$$

其中 $a^2=\dfrac{T}{\rho}$，$f=\dfrac{F}{\rho}$。式(1.1.1)刻划了均匀弦的微小振动的一般规律，通常称它为**弦振动方程**。

若 $F(x,t)=0$，方程(1.1.1)化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1.1.2)$$

称为**弦的自由振动方程**。

由于弦在绷紧以后，相邻各“微元”之间有张力，在张力作用下，一个微元的振动必定带动它的邻近微元，而邻近微元又带动它自己的邻近微元……，这样，一个微元的振动必然传播到整根弦。这种振动传播现象叫做波。因此，式(1.1.1)，式(1.1.2)又称为**一维波动方程**。

2）膜振动方程

考察一块柔软均匀的张紧的膜。我们取膜静止时所在的平面为 xoy 平面，用 $u(x,y,t)$ 表示膜在点 (x,y) 处在时刻 t 的运动位移。假设膜是不能抵抗弯曲和切变的，当受外力作用时，由于膜的张力作用，膜产生往返上下的微小振动。在上述假设下，我们可以导得张力的线密度 $\boldsymbol{T}$ 的数量 T 可近似地视作与时间及位移无关的常量。

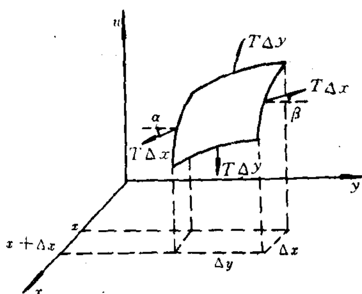


图 1-2

现在导出膜振动方程。假设膜在振动时受到垂直方向的外力密度为 $F(x,y,t)$。在膜上任取一块微小元素，由于振动是微小的，这块元素的面积近似地等于 $\Delta x\Delta y$，见图 1-2。若 T 是单位长度上的张力，则作用在这块微元各边上的力是 $T\Delta x$ 和 $T\Delta y$。在垂直方向的分力是

$$T\Delta x\sin\beta - T\Delta x\sin\alpha + T\Delta y\sin\delta - T\Delta y\sin\gamma$$

因为振动是微小的，故

$$\sin\beta \approx \mathrm{tg}\beta,\ \sin\alpha \approx \mathrm{tg}\alpha,\ \sin\delta \approx \mathrm{tg}\delta,\ \sin\gamma \approx \mathrm{tg}\gamma$$

于是作用在这块微元上垂直方向的合力为

$$F(x,y,t)\Delta x\Delta y + T\Delta x(\mathrm{tg}\beta - \mathrm{tg}\alpha) + T\Delta y(\mathrm{tg}\delta - \mathrm{tg}\gamma)$$

根据牛顿第二运动定律得

$$\rho\Delta A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\Delta x(\mathrm{tg}\beta - \mathrm{tg}\alpha)$$

$$+ T\Delta y(\text{tg}\delta - \text{tg}\gamma) + F(x,y,t)\Delta x\Delta y \qquad (1.1.3)$$

其中 ρ 为单位面积膜的质量，$\Delta A \approx \Delta x\Delta y$，由微积分学知

$$\text{tg}\alpha = \frac{\partial u(x_1,y)}{\partial y},\ \text{tg}\beta = \frac{\partial u(x_2,y+\Delta y)}{\partial y}$$

$$\text{tg}\delta = \frac{\partial u(x,y_1)}{\partial x},\ \text{tg}\gamma = \frac{\partial u(x+\Delta x,y_2)}{\partial x}$$

其中 $x_1,x_2 \in (x,x+\Delta x)$，$y_1,y_2 \in (y,y+\Delta y)$，把这些值代入式(1.1.3)得

$$\rho\Delta x\Delta y\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\Delta x\left[\frac{\partial u(x_2,y+\Delta y)}{\partial y} - \frac{\partial u(x_1,y)}{\partial y}\right]$$

$$+ T\Delta y\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,y_2)}{\partial x} - \frac{\partial u(x_1,y_1)}{\partial x}\right] + F(x,y,t)\Delta x\Delta y$$

将上式除以 $\rho\Delta x\Delta y$，并令 Δx、Δy 都趋于零取极限得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(x,y,t) \qquad (1.1.4)$$

其中 $a^2 = \frac{T}{\rho}$，$f(x,y,t) = \frac{F(x,y,t)}{\rho}$，这个方程称为**二维波动方程**。

如果考察电磁波或声波在空间的传播，我们还可得到**三维的波动方程**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x,y,z,t) \qquad (1.1.5)$$

波动方程在经典物理和量子物理的每个部分都可能出现，它在各种条件下的解构成本书的重要内容。

2. 热传导方程

现在研究均匀物体中热的传导。由于温度不均匀，热量从温度高的地方向温度低的地方转移，这种现象叫作热传导，故有

物理模型：设有一温度分布不均匀的热物体，体内有密度为 $F(M,t)$ 的热源。试建立热传导方程。

物理规律：热量守恒律。物体内部的热量的增加等于通过物体

界面流入的热量与物体内部的热源所产生的热量的总和

$$\boxed{\begin{matrix} t_2 \\ \text{热量} \end{matrix}} - \boxed{\begin{matrix} t_1 \\ \text{热量} \end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix} t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \\ \text{通过界面流入的热量} \end{matrix}} + \boxed{\begin{matrix} t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \\ \text{热源生成的热量} \end{matrix}}$$

简化假设：物体为均匀各向同性的。因此认为物体的密度 ρ、比热 c、导热系数 k 均是常数。服从傅里叶实验定理。

下面用“微元法”来建立数学模型。设 $u(M,t)$ 为点 $M(x,y,z)$ 在时刻 t 的温度。任取一体微元 $\mathrm{d}V$，其表面积记为 S。我们讨论这个微元内的热平衡。

先考查流入微元的热量。流入 $\mathrm{d}V$ 的热是来自热传导及热源。由传热学中的傅里叶定律：热流强度与温度梯度成正比。即

$$v = -k \cdot \mathrm{grad}u \qquad (k > 0)$$

负号是由于热量的流向与温度梯度的正向相反。在单位时间内流入 $\mathrm{d}V$ 的总热量为

$$\theta_1 = \iint_S k\,\mathrm{grad}u \cdot \mathrm{d}S = \iiint_V k\,\mathrm{div}\ \mathrm{grad}\ u\,\mathrm{d}V$$

n 为曲面 S 的外法线。来自热源的热量为

$$\theta_2 = \iiint_V F(M,t)\mathrm{d}V$$

其次考察微元 $\mathrm{d}V$ 温度升高所需的热量，由热力学知，单位时间内 $\mathrm{d}V$ 温度升高所需的热量为

$$\theta_3 = \iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}V$$

由热量守恒律得

$$\iiint_V \mathrm{div}k\ \mathrm{grad}u\mathrm{d}V + \iiint_V F(M,t)\mathrm{d}V = \iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}V$$

由 V 的任意性，故有

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + F(M,t)$$

或

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(M,t) \qquad (1.1.6)$$

其中 $a^2=\frac{k}{c\rho}$，$f(M,t)=\frac{F(M,t)}{c\rho}$。

(1.1.6)式称为**非齐次热传导方程**。

如果所考察的物体内部无热源，方程(1.1.6)化为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \qquad (1.1.7)$$

称为**齐次热传导方程**。

热传导方程还可描述扩散物质的浓度、粒子的扩散等物理现象。

3. 拉普拉斯方程和波阿松(Poisson)方程

现在我们来导出偏微分方程理论中最著名的一个方程——拉普拉斯方程。

考察电荷密度为 $\rho(x,y,z)$，介电常数 $\varepsilon=1$的静电场 E，设点 $M(x,y,z)$的电势为 $\varphi(x,y,z)$，则由定义电场强度

$$E=-\operatorname{grad}\varphi$$

任取一体微元，其表面积记为 S，所围区域记为 Ω。根据静电学基本定理：穿过闭合曲面 S 向外的电通量等于闭合曲面 S 所围空间 Ω 中的电量的4π 倍。即

$$\oiint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}S=4\pi\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\mathrm{d}v$$

应用曲面积分的高斯定理得

$$\iiint_\Omega \operatorname{div}E\mathrm{d}v=\iiint_\Omega 4\pi\rho(x,y,z)\mathrm{d}v$$

或

$$\iiint_\Omega \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi\mathrm{d}v=\iiint_\Omega -4\pi\rho(x,y,z)\mathrm{d}v$$

由于 Ω 是任取的区域，故

$$\text{divgrad}\varphi = -4\pi\rho(x,y,z)$$

即

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -4\pi\rho(x,y,z) \qquad (1.1.8)$$

称为**波阿松方程**或**有源的电势方程**。

特别是在自由电场(即 $\rho=0$的情形)中,则方程(1.1.8)化为

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \qquad (1.1.9)$$

它称为**拉普拉斯方程**或**无源电势方程**。

拉普拉斯方程不仅出现在静电场问题中,它还可描述许多物理现象,如定常温度场,引力势,流体力学中的势和弹性力学中的调和势等。概括地说,它所描写的自然现象是恒稳的、定常的,亦即与时间无关的。

为书写方便,引入拉普拉斯算子 Δ(或 Δ^2):

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

于是,拉普拉斯方程可表为

$$\Delta u = 0 \qquad (\Delta^2 u = 0)$$

波动方程和热传导方程可表为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Delta u \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u$$

这三个方程各是一类方程的典型,各反映一类自然规律性。

4. 定解条件

数学物理方程是同一类现象的共同规律,例如,不论是弹性体、流体或电磁现象,它们的一些典型波动过程,都是由波动方程描述的。又如,物体内部温度分布规律、扩散物质的浓度、电缆的传输是由热传导方程描述的。可是,在同一类物理现象中,各个具体问题又各有其特殊性,物理规律并不反映这种特殊性。例如对同一根弦,用薄刀背敲击下发出的声音比较刺耳,而用手指的弹拨下发

出的声音就比较和谐。尽管弦的振动是按同样规律进行的。但由于"初始"时刻的振动情况不一样，后来的振动情况也就不一样。又如剧院内壁仅采用普通砖墙，由于较强的反射性使声波在剧院内壁多次反射，形成"余音不绝"，使人无法听清，若内壁镶有适当的吸声材料，传到墙壁的声波大部分被吸收，而消除了"余声不绝"，听起来就比较清楚了。虽然声波是按同样的规律在剧院空间传播，内壁材料的吸声性能对剧院声学质量却有极大的关系。因此，为了刻划一个具体的对象，还需要一定的补充条件。这些补充条件称为**定解条件**。在数学物理方程理论中，我们总是联系着一定的定解条件来研究一个方程的。这就叫做**定解问题**。

常见的定解条件有两大类。一类是对于描述随时间演变的方程，如式(1.1.2)、式(1.1.7)(这类方程统称为**发展方程**)，需要给出在初始时刻的状态，例如对于方程(1.1.7)，就需要指定初始时刻(设为$t=0$)的温度：

$$u(x,y,z,t)|_{t=0}=\varphi(x,y,z) \qquad (1.1.10)$$

其中$\varphi(x,y,z)$是已知函数，对于方程(1.1.2)，由于它描述一个力学运动规律，需要指定初始位移和初始速度。

$$u|_{t=0}=\varphi \qquad u_t|_{t=0}=\psi \qquad (\varphi,\psi\text{ 已知}) \qquad (1.1.11)$$

式(1.1.10)和式(1.1.11)称为初始条件。

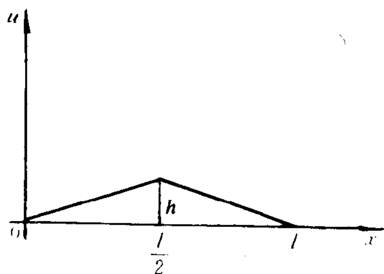


图1-3

值得注意的是，初始条件应当给出整个系统的初始状态，不能只是系统中个别点的初始状态。例如一根长为l两端固定的弦，开始时将中点朝横向拉开距离h(图1-3)。这个初始位移不能写成

$$u|_{t=0}=h$$

而应是

$$u|_{t=0}\begin{cases}\dfrac{2h}{l}x & 0\leqslant x<\dfrac{l}{2}\\ \dfrac{2h}{l}(l-x) & \dfrac{l}{2}\leqslant x\leqslant l\end{cases}$$

如果我们研究一个有界区域 Ω 中的物理现象，例如 Ω 内的温度分布或者一段弦$[0,l]$的振动，则区域边界 $\partial\Omega$（或$\{0,l\}$）上的状态将是十分重要的。它反映物体与周围介质的相互作用，描述系统或过程边界状态的条件称为**边界条件**。常见的边界条件有以下三类。

第一类边界条件，直接给定了未知函数在边界上的值。即

$$u|_{\partial\Omega}=f(M,t),\qquad M\in\partial\Omega\quad(f\text{ 已知})\qquad(1.1.12)$$

它称为**第一类边界条件**。

例如长为 l 的弦（杆），两端固定可表为

$$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=l}=0$$

若 $x=l$ 端按已知规律 $f_1(t)$运动，即 $u|_{x=l}=f_1(t)$。

又如细杆导热问题，若杆的一端 $x=a$ 处于恒温 u_0的环境中，即

$$u|_{x=a}=u_0$$

或温度按已知规律 $f(t)$变化，应表为

$$u|_{x=a}=f(t)$$

第二类边界条件，给定的是未知函数在边界法向导数导的值，即

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}=f(M,t),\ M\in\partial\Omega\quad(f\text{ 为已知})\qquad(1.1.13)$$

$\boldsymbol{n}$ 为边界 $\partial\Omega$ 的外法矢。它称为**第二类边界条件**。

例如，长为 l 的细杆导热问题，若 $x=0$端有热流 $Q(t)$流入，在 $x=l$ 端绝热，由傅里叶实验定律知，流出热量 $Q=-k\dfrac{\partial u}{\partial n}$，于是在 $x=0$端，应为

$$k\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{x=0}=k\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=0}=\theta(t)$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{x=0}=\frac{1}{k}Q(t)$$

在 $x=l$ 端绝热，即无热流。故

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}=0$$

第三类边界条件：在边界上给出的是未知函数及其法向导数的值的线性组合。即

$$\left[u+\lambda\frac{\partial u}{\partial n}\right]_{\partial\Omega}=f(M,t),\ M\in\partial\Omega\quad(f\text{ 已知})\quad\lambda>0\tag{1.1.14}$$

$\boldsymbol{n}$ 为边界 $\partial\Omega$ 的外法矢。

例如，杆在 $x=l$ 端固定在弹性支承上，即弹性支承的伸缩符合虎克定律。如果支承原来的位置为 $u=0$，则 u 在端点的值表示支承在该点的伸长。在 $x=l$ 端，弦对支承拉力的垂直方向的分量为 $-E\frac{\partial u}{\partial x}$，依据虎克定律得

$$-E\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}=ku\Big|_{x=l}$$

即

$$\left(u+\lambda\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=l}=0\quad\left(\lambda=\frac{E}{k}\right)$$

如果研究无界区域中的问题，当然就不再需要边值条件，但有时需对解在无穷远处的渐近状况加以限制，这实际上也是边值条件。

总之，对于有界区域的发展方程，既要初始条件又要边值条件。这种定解问题称为**初边值问题或混合问题**。

对于全空间的发展方程，应给出初始条件。这种定解问题称为**柯西(Cauchy)问题或初值问题**。

对于方程(1.1.8)应给出边值条件，只有边值条件的定解问题称为**边值问题**。

5. 定解问题的适定性

什么样的定解问题是合理的？也就是说，它可以很好地反映物理规律性？这里有三个必须要考虑的问题。

1) 解的存在性

本书中所说的"解"是指古典解。例如方程式(1.1.1)～式(1.1.8)都是二阶方程，凡满足方程的 c^2 函数称为解($c^k(\Omega)$表示在 Ω 上直到 k 阶导数皆连续的函数空间，Ω 是一个开集，有时略去 Ω 而直书为 c^k)。

由于建立方程时通常都做了某些简化假设，定解条件也是对具体的物理状态分析后提出来的，如果定解条件提得不合适。例如条件提得过多或者相互矛盾，就可能使定解问题的解不存在。所以，有必要研究解的存在性。同时，解的存在性的研究也往往提供了求解的方法。

2) 解的唯一性

解的唯一性是研究定解问题的解是否只有一个。如果定解条件提得不够，使满足定解问题的解不只一个，不符合客观物理过程唯一性的要求。所以求解时必须研究条件是否足够以保证解的唯一性。另外，用不同的方法解同一定解问题。可能得到形式不同的解的表达式，若从理论上证得解是唯一的，则可断定所得形式不同的解是相等的。

3) 稳定性

定解问题中的一些已知量，如式(1.1.10)～式(1.1.14)中的 f，都是由实验测得的，因而不可避免地会有误差。如果数据的微小误差会导致解的巨大误差，这就失去稳定性，不能保证所得解在一定精确度内反映客观物理过程，在实际问题中不能应用。

下面是阿达玛(Hadamard)关于不稳定性的著名的例子。考察

拉普拉斯方程的初值问题

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad -\infty < x < +\infty \quad y > 0 & (1.1.15) \\ u|_{y=0} = \varphi(x),\ u_y|_{y=0} = \psi(x) & (1.1.16) \end{cases}$$

令其解为 u_1，如果对初值 $\psi(x)$ 给以微小的扰动 $\frac{1}{k^n}\sin kx$，即将 (1.1.16)式换为

$$u|_{y=0} = \varphi(x),\ u_y|_{y=0} = \psi(x) + \frac{1}{k^n}\sin kx \qquad (1.1.17)$$

(k 为正整数)，令其解为 u_2，记 $U=u_2-u_1$，则应有

$$\begin{cases} \nabla^2 U = 0 \quad -\infty < x < +\infty \quad y > 0 \\ U|_{y=0} = 0,\quad U_y|_{y=0} = \dfrac{1}{k^n}\sin kx \end{cases}$$

容易验证：

$$U(x,y) = \frac{1}{k^{n+1}}\mathrm{sh}ky\sin kx$$

是它的解。当 n 充分大时，在任意狭长的带形 $0<y\leqslant y_0$ 处均可使 $\sup U(x,y)$ 任意大，故拉普拉斯方程的初值问题的解是不稳定的。

具有上述三种性质的定解问题称为**适定问题**。由于适定性的研究需要进行较多的数学分析，在许多情况下，论证它较困难或需加些条件。因此，当用数学物理方程的理论与方法解决具体的物理、力学和工程技术问题时，不必坚持先解决问题的适定性，再去求解。

§1.2 二阶线性偏微分方程的分类

数学、物理中的许多问题都可化为二阶线性偏微分方程。人们的研究表明，反映不同物理规律的方程，可以从方程的形状上看到其区别。对于一般的二阶线性方程进行分类，从而对典型方程进行研究是有益的。

1. 两个自变量函数的二阶线性方程

一般的二阶线性方程总可以写成如下形状

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=f \tag{1.2.1}$$

其中 $a_{11},a_{12},a_{22},b_1,b_2,c,f$ 是 x 和 y 的二次连续可微函数。在以下的讨论中，常将二阶线性偏微分方程简称为二阶方程。

二阶方程的分类①，是建立在通过自变量的变换能够使方程(1.2.1)在一点化成标准形式或典型形式的基础上的。一个方程在点(x_0,y_0)称为是双曲型、抛物型或椭圆型是根据式子

$$a_{12}^2(x_0,y_0)-a_{11}(x_0,y_0)a_{22}(x_0,y_0) \tag{1.2.2}$$

为正、为零或为负而定。如果方程在一个区域 Ω 内的每点均为双曲型的、抛物型的或椭圆型的，就称该方程在这区域 Ω 内是双曲型、抛物型或椭圆型的。

我们现在开始对方程(1.2.1)在区域 Ω 的某点(x_0,y_0)的近旁进行简化，为此引入自变量变换

$$\xi=\xi(x,y),\quad \eta=\eta(x,y) \tag{1.2.3}$$

其中，式(1.2.3)是二次连续可微函数，且雅可比(Jacobi)行列式

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}\xi_x & \xi_y\\ \eta_x & \eta_y\end{vmatrix}$$

在点(x_0,y_0)不等于零。根据隐函数存在定理，在点(x_0,y_0)近旁变换式(1.2.3)是可逆的，利用变换式(1.2.3)可将方程(1.2.1)化成关于自变量 ξ,η 的偏微分方程。

$$A_{11}u_{\xi\xi}+2A_{12}u_{\xi\eta}+A_{22}u_{\eta\eta}+B_1u_\xi+B_2u_\eta+Cu=F \tag{1.2.4}$$

由于

---

① 二阶线性偏微分方程的分类是由解析几何中的二次方程分类得到启发的二次方程 $a_{11}x^2+a_{12}xy+a_{22}y^2+b_1x+b_2y+c=0$ 是双曲线、抛物线或椭圆是按 $a_{12}^2-a_{11}a_{22}$ 为正、为零或为负而定的。

$$\begin{cases} u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x \\ u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx} \\ u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy} \\ u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy} \end{cases}$$

故方程(1.2.4)中的系数

$$\begin{cases} A_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 \\ A_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y \\ A_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2 \end{cases} \tag{1.2.5}$$

为简化方程，选取变换式(1.2.3)使方程(1.2.4)的二阶偏导数项化成最简形式，由式(1.2.5)知，A_{11}与A_{22}的形式是完全相同的，只是所用记号ξ和η有异。因此，若能获得方程

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_xz_y + a_{22}z_y^2 = 0 \tag{1.2.6}$$

的两个函数无关解$z=z_1(x,y)$及$z=z_2(x,y)$，就取

$$\xi = z_1(x,y) \quad \eta = z_2(x,y)$$

则$A_{11}=0$，$A_{22}=0$。方程(1.2.4)得以化简。

现在，问题归结到求解方程(1.2.6)。而关于z的一阶偏微分方程(1.2.6)的求解问题可以化为求常微分方程

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\left(\frac{dy}{dx}\right) + a_{22} = 0 \tag{1.2.7}$$

的通积分。事实上，用$(z_y)^2$除方程(1.2.6)两边得

$$a_{11}\left(\frac{z_x}{z_y}\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{z_x}{z_y}\right) + a_{22} = 0 \tag{1.2.8}$$

沿着曲线$z(x,y)=c$有

$$dz = z_x dx + z_y dy = 0$$

即

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{z_x}{z_y}$$

因此方程(1.2.8)可写成方程(1.2.7)，或

$$a_{11}(\mathrm{d}y)^2 - 2a_{12}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + a_{22}(\mathrm{d}x)^2 = 0 \qquad (1.2.9)$$

常微分方程(1.2.9)称为偏微分方程(1.2.1)的**特征方程**。称特征方程(1.2.9)的积分曲线为方程(1.2.1)的**特征线**。

为求方程(1.2.9)的积分曲线，将(1.2.9)分解成两个方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \qquad (1.2.10)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \qquad (1.2.10')$$

积分即得。

方程(1.2.1)按方程(1.2.10)，(1.2.10′)分类，有下列三种情形。

(1) 在(x_0, y_0)的近旁$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$，方程(1.2.1)有两族不相同的实特征线

$$z_1(x,y) = c_1, \; z_2(x,y) = c_2$$

当z_{1x}, z_{1y}, z_{2x}及z_{2y}不同时为零，即变换

$$\xi = z_1(x,y), \; \eta = z_2(x,y)$$

后，方程(1.2.4)中的系数$A_{11} = A_{22} = 0$，可以证明$A_{12} \neq 0$，因此式(1.2.4)可化为

$$u_{\xi\eta} = \bar{A}u_\xi + \bar{B}u_\eta + \bar{C}u + \bar{D} \qquad (1.2.11)$$

其中$\bar{A}$、$\bar{B}$、$\bar{C}$和$\bar{D}$皆为ξ、η的函数。这种形式称为**双曲型方程的第一标准形式**。

如果对方程(1.2.11)再作自变量变换

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{2}(\xi + \eta) \\ \beta = \dfrac{1}{2}(\xi - \eta) \end{cases}$$

则方程(1.2.11)化为

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = A_1u_\alpha + B_1u_\beta + C_1u + D_1 \qquad (1.2.12)$$

这种形式称为**双曲型方程的第二标准形式**。

(2) 在区域 Ω 内点 (x_0y_0) 的近旁 $\Delta\equiv a_{12}^2-a_{11}a_{22}\equiv 0$，且 a_{11}，a_{12}，a_{22}不全为零。此时方程(1.2.10)与式(1.2.10′)完全相同。方程(1.2.1)只有一族实特征线，记作 $z_1(x,y)=c$，取 $\xi=z_1(x,y)$ 有 $A_{11}=0$，又

$$
\begin{aligned}
A_{12} &= a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y \\
&= (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y) = 0
\end{aligned}
$$

其中 $\eta(x,y)=z_2(x,y)$ 是任选的，只要使 $z_1(x,y)$，$z_2(x,y)$ 函数无关，方程(1.2.4)可化为

$$
u_{\eta\eta} = Au_\xi + Bu_\eta + Cu + D \tag{1.2.13}
$$

方程(1.2.13)称为**抛物型方程的标准形式**。

(3) 在区域 Ω 内点 (x_0y_0) 近旁 $\Delta\equiv a_{12}^2-a_{11}a_{22}<0$，此时不存在实的特征线，特征方程的通积分是一对共轭复值函数

$$
z_1(x,y) + iz_2(x,y) = c_1,\ z_1(x,y) - iz_2(x,y) = c_2
$$

其中 $z_1(x,y)$ 与 $z_2(x,y)$ 为实函数，则 $z(x,y)=z_1(x,y)+iz_2(x,y)$ 满足

$$
a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_xz_y + a_{22}z_y^2 = 0
$$

为避免引入复数，作变换

$$
\begin{cases}
\xi = R_e z(x,y) = z_1(x,y) \\
\eta = I_m z(x,y) = z_2(x,y)
\end{cases}
$$

可以证明，$z_1(x,y)$ 和 $z_2(x,y)$ 是函数无关的。

由于 $\xi+i\eta$ 满足方程(1.2.6)，故有

$$
a_{11}(\xi_x + i\eta_x)^2 + 2a_{12}(\xi_x + i\eta_x)(\xi_y + i\eta_y) + a_{22}(\xi_y + i\eta_y)^2 = 0
$$

化简后，由实部与虚部分别为零，可得

$$
\begin{gathered}
a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2 \\
a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y = 0
\end{gathered}
$$

即

$$
A_{11} = A_{22},\quad A_{12} = 0
$$

于是方程(1.2.4)化为

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = Au_{\xi} + Bu_{\eta} + Cu + D \qquad (1.2.14)$$

方程(1.2.14)称为**椭圆型方程的标准形式**

综上所述，二阶线性偏微分方程(1.2.1)，依 $\Delta \equiv a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ 的符号可分成三种类型，并可化为三种标准形式，即

表1.1

判别式符号	方程类型	方程的标准形式
$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$	双曲型	$u_{xx} - u_{yy} = H$(或 $u_{xy} = H$)
$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$	抛物型	$u_{xx} = H$
$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$	椭圆型	$u_{xx} + u_{yy} = H$

其中 H 为 x, y, u, u_x, u_y 的函数。

不难验证

$$A_{12}^2 - A_{11}A_{22} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})J^2$$

其中 $J = \dfrac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \neq 0$，这就是说，在可逆变换下，方程判别式的符号不变，从而，方程经可逆自变量变化后，其类型具有不变性。

例1 试讨论方程

$$y^2 u_{xx} - x^2 u_{yy} = 0$$

的类型，并化为标准形式。

解：这里 $a_{11} = y^2$，$a_{12} = 0$，$a_{22} = -x^2$，于是判别式

$$\Delta \equiv a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = x^2y^2 > 0 \quad (x \neq 0, y \neq 0)$$

所以，除坐标轴 $x=0$ 和 $y=0$ 外，方程处处是双曲型的。

方程的特征方程为

$$y^2\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 - x^2 = 0$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{y}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}$$

得两族特征线

$$\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 = c_1, \quad \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 = c_2$$

取变换

$$\begin{cases}\xi = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 \\ \eta = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2\end{cases}$$

原方程化为

$$u_{\xi\eta} = \frac{\eta}{2(\xi^2 - \eta^2)}u_\xi - \frac{\xi}{2(\xi^2 - \eta^2)}u_\eta$$

例2 判别方程

$$x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 0$$

的类型，并化为标准形式。

解：$\Delta \equiv a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = x^2y^2 - x^2y^2 = 0$

因此方程处处是抛物型的。由特征方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}$$

得特征线族

$$\frac{y}{x} = c$$

作变换

$$\begin{cases}\xi = \frac{y}{x} \\ \eta = y\end{cases}$$

其中 η 是任选的，显然 ξ 与 η 是函数无关的。原方程化为

$$y^2u_{\eta\eta} = 0,\ \text{即}\ u_{\eta\eta} = 0 \quad (y \neq 0)$$

应该指出，给定的偏微分方程在不同的区域内，可以属于不同的类型。例如在研究高速流体时遇到的特里谷米（Tricomi）方程

$$u_{xx} + xu_{yy} = 0$$

因为 $\Delta \equiv a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -x$，故方程在右半平面 $x > 0$ 内是椭圆型，特征方程为

$$\mathrm{d}y \pm i\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = 0$$

得一族共轭复特征线

$$y+i\,\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}=c_1,\ y-i\,\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}=c_2$$

取变换

$$\begin{cases}\xi=y\\ \eta=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\end{cases}$$

方程化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=-\frac{1}{3\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta}$$

当 $x<0$时，即在左半平面内是双曲型的，特征方程为

$$\mathrm{d}y\pm\sqrt{-x}\,\mathrm{d}x=0$$

得两族实特征线

$$y+\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}=c_1,\ y-\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}=c_2$$

作变换

$$\begin{cases}\xi=y+\dfrac{2}{3}(-x)^{\frac{2}{3}}\\ \eta=y-\dfrac{2}{3}(-x)^{\frac{2}{3}}\end{cases}$$

方程化为

$$u_{\xi\eta}=\frac{1}{6(\xi-\eta)}(u_\xi-u_\eta)$$

在 $x=0$，即 y 轴上 $\Delta\equiv a_{12}^2-a_{22}a_{11}=0$，是抛物型的。在含 y 轴上的点的任一区域内属混合型。

2. 多个自变量函数的二阶线性方程

n 个自变量的二阶线性偏微分方程的形式为

$$\sum_{ij=1}^{n}a_{ij}u_{x_ix_j}+\sum_{j=1}^{n}b_iu_{x_i}+cu=f \qquad (1.2.15)$$

其中 a_{ij},b_i,c 及 f 是 n 维空间 R^n 中某区域 Ω 内的连续函数。设 $a_{ij}=a_{ji}$，对于多个自变量的方程，通常不能像两个自变量情形那样，

将方程在一个区域内化成标准形式②。当 $n\geqslant3$时,方程的分类一般只能逐点分析。

在处理两个自变量的方程的分类时,利用二阶导数的系数的代数性质作为分类的标准,即将二阶微分算子式

$$L(u) = a_{n}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy}$$

与二次型

$$A(\lambda) = a_{11}\lambda_1^2 + 2a_{12}\lambda_1\lambda_2 + a_{22}\lambda_2^2$$

相对应。对方程为椭圆型的点,判定(行列)式 $\Delta<0$,此时二次型为正定或负定;对于抛物型的点,$\Delta=0$,这就是二次型 $A(\lambda)$为退化的情形;对于方程为双曲型的点,二次型 $A(\lambda)$既不为退化,又不是正定或负定的。即三种情形分别对应于二次型 $A(\lambda)$的特征根,方程

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

的根为同号、有零根及异号的情形。

对于多个自变量函数的二阶线性方程,也有必要将方程划分为若干类型来进行研究。我们也作二次型

$$A(\lambda) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\lambda_i\lambda_j$$

对多个自变量的拉普拉斯方程

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \cdots + u_{x_nx_n} = 0$$

相应的二次型 $A(\lambda)=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_n^2$ 是正定的,它所对应的矩阵的所有特征根为同号。对于波动方程

$$u_{tt} = a^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \cdots + u_{x_{n-1}x_{n-1}})$$

相应的二次型 $A(\lambda)=\lambda_0^2-a^2(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_{n-1}^2)$既不是正定(或负定的),也非退化的,在其相应矩阵的 n 个特征根中,有$(n-1)$个同

② 王载舆编《数学物理方程及特殊函数》,清华大学出版社,(1991)第一版,附录I。

号(即 a^2)。对 n 个自变量的热传导方程

$$u_t = a^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \cdots + u_{x_{n-1}x_{n-1}})$$

而言,二次型 $A(\lambda) = -a^2(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_{n-1}^2)$ 为退化的,即其相应的矩阵至少有一个特征根为零,其余同号。因而,我们也自然地可对方程(1.2.15)作出如下分类:作矩阵 $A=(a_{ij})$, $a_{ij}=a_{ji}$,并记它的特征根为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,在某点$(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$。

若 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 均不为零,且同号,则称式(1.2.15)为**椭圆型方程**;

若 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 均不为零,其中 $n-1$ 个有相同符号,另一个的符号与此相反,则称式(1.2.15)为**双曲型方程**;

若 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 均不为零,且有不少于两个具有正号,不少于两个具有负号(显然,此时 $n\geqslant4$),则称式(1.2.15)为**超双曲型方程**;

若 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 中至少有一个为零,其余同号,则称式(1.2.15)为**抛物型方程**。

将给定方程化成标准型的问题,一般不会单独出现,它通常是讨论某个偏微分方程或相应的定解问题时所需进行的第一步工作。

习　题　一

1. 设有一垂直悬挂的均质柔软绳,在重力作用下处于铅直的平衡位置,拉它一下然后放手使作微小振动,试导出此绳的振动方程。

2. 证明:圆锥形枢轴的纵振动方程为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1-\frac{x}{h}\right)^2\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\frac{1}{a^2}\left(1-\frac{x}{h}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

其中 u 是横坐标为 x 的枢轴的纵向位移,h 为圆锥的高。

3. 长为 l 的柔软均匀绳索,一端固定在以匀速 ω 转动的竖直轴上。由于惯性离心力的作用,这弦的平衡位置应是水平线,试推导此绳相对于水平线的横振动方程。

4. 长为 l 的柔软均质重绳,上端固定在以匀速 ω 转动的竖直轴上。由于

重力作用，绳的平衡位置应是竖直线，试推导此绳相对于竖直线的横振动方程。

5. 一均匀细杆直径为 d，设它在同一截面上的温度相同，杆的表面和周围介质的热交换服从

$$d\theta = k(u - u_1)\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

若杆的密度为 ρ，比热为 c，热传导系数为 k，试导出温度 u 满足的方程。

6. 在混凝土浇灌后的冷却过程中，可能由于温度应力的影响而产生裂缝，为了避免产生裂缝采取措施，就必须计算出在这过程中温度应力的分布和变化，试根据物理学中的一些基本规律来推导在热传导过程中温度所满足的方程。

7. 长为 l 的均匀杆两端受拉力 F_0 作用而纵振动，写出边界条件。

8. 一均匀杆原长 l，一端固定，另一端沿杆的轴线方向拉长 e 而静止，突然放手任其振动，试写出定解条件。

9. 长为 l 的均匀杆，两端有恒定的热流进入，其强度为 q_0，写出这个热传导问题的边界条件。

10. 长为 l 的均匀杆，侧面绝缘，一端温度为零，另一端有恒定热流 q 进入（单位时间内通过单位截面积流入的热量）。杆的初始温度分布是 $\frac{x(l-x)}{2}$，试写出相应的定解问题。

11. 设有长为 l 两端 $x=0$ 和 $x=l$ 固定的均匀弦，弦中张力为 T，在 $x=h$ 点以横向力 F_0 拉弦，达到平衡后放手使其自由振动，试写出定解条件。

12. 半径为 R 的圆膜，初始位移为 $\varphi(\rho,\theta)$，初始速度为 $\psi(\rho,\theta)$，圆周固定，试写出定解条件。

13. 半径为 R，高为 H 的圆柱，侧面绝热，上底温度为 u_0，下底温度为 u_1，试写出边界条件。

14. 判别下列方程属何种类型：

(1) $y^2u_{xx}+x^2u_{yy}=0$

(2) $u_{xx}+xyu_{yy}=0$

(3) $x^2u_{xx}+2xyu_{xy}-3y^2u_{yy}-2xu_x+4yu_y+16x^4u=0$

15. 将下列方程化为标准形：

(1) $u_{xx}+4u_{xy}+5u_{yy}+u_x+2u_y=0$

(2) $4y^2u_{xx}-e^{2x}u_{yy}-4y^2u_x=0$

(3) $\mathrm{tg}^2 x u_{xx} - 2y\mathrm{tg} x u_{xy} + y^2 u_{yy} + \mathrm{tg}^3 x u_x = 0$

(4) $x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$

(5) $4u_{xx} + 5u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = 2$

16. 证明两个自变量的二阶线性偏微分方程

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + f = 0$$

的类型与坐标系的选择无关。

第二章　柯西问题(初值问题)

本章讨论柯西(Cauchy)问题,即初值问题的解法,在§2.1中利用达朗贝尔解法,导出了弦振动方程初值问题解的表达式——达朗贝尔公式。在§2.2中用球平均法导出了三维波动方程初值问题解的表达式——泊松公式,然后用降维法导出了二维波动方程初值问题解的表达式,在§2.3中运用齐次化原理,得到非齐次方程的解。全章中,我们都试图阐明相应的物理意义。

由偏微分方程和初始条件构成的定解问题称为初值问题。也就是说,初值问题是没有边界条件的问题,一个物理系统总是有限的,必然有边界。因此,描述它需要有边界条件,但是在实践中也常遇到这种情况,由于考察物理系统某一部分的时间不长,边界的影响还没有传到,这时就无需提出边界条件,或认为边界在无穷远,例如弦的振动,弦总是有限长的,有两个端点。如果我们研究的是不靠近两端的一段弦,且时间不长,以致两端的影响都没有传到这段弦,不妨认为两个端点都在无限远,当然就不需要提边界条件了。这样,有限长的真实的弦就被抽象成无界的弦,无界弦的振动问题就只有初始条件,而无边界条件。即

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & -\infty < x < +\infty \quad t > 0 \\ u\Big|_{t=0} = \varphi(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

其中 $\varphi(x)$为初始位移,$\psi(x)$为初始速度。

§2.1 一维齐次波动方程的初值问题

在常微分方程中，初值问题指的是求已知微分方程在初始时刻满足适当给定的初始条件的解的问题，如二阶常微分方程

$$\frac{d^2u}{dt^2}=f\left(t,u,\frac{du}{dt}\right)$$

和初始条件

$$\begin{cases}u|_{t=0}=A\\ \dfrac{du}{dt}|_{t=0}=B\end{cases}$$

构成初值问题，求解的方法：一般先求方程的通解，再利用初始条件确定这些通解中的任意常数。就偏微分方程来说，也有类似的定解问题。现在，我们仿照常微分方程的这种求解方法，去求解偏微分方程的初值问题，即先求偏微分方程的通解，再用初始条件确定通解中的任意函数。这种方法通常称为**行波法**。行波法处理的对象是物理学中的无界问题。

1. 达朗贝尔公式

我们从最简单而最重要的方程——一维波动方程开始研究是十分自然的。一般波动方程的解的基本特性，在这种简单情况下仍是保持的。

考察无界弦的初值问题

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx} & -\infty<x<+\infty \quad t>0 & (2.1.1)\\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t|_{t=0}=\psi(x) & -\infty<x<\infty & (2.1.2)\end{cases}$$

为求方程(2.1.1)的通解，将方程化为第一标准形式，其特征方程为

$$(dx)^2-a^2(dt)^2=0$$

两族实特征线是

$$x + at = c_1,\ x - at = c_2$$

引入特征坐标

$$\begin{cases} \xi = x + at \\ \eta = x - at \end{cases}$$

方程(2.1.1)化为

$$u_{\xi\eta} = 0 \tag{2.1.3}$$

将上式对 η 积分得

$$u_{\xi} = f(\xi)$$

再对 ξ 积分得

$$u(\xi,\eta) = \int f(\xi)\mathrm{d}\xi + G(\eta) = F(\xi) + G(\eta)$$

其中 F,G 是任意二次连续可微函数,代回原自变量 x 和 t,得方程(2.1.1)的通解

$$u(x,t) = F(x + at) + G(x - at) \tag{2.1.4}$$

现在利用初始条件式(2.1.2)确定任意函数 F、G,把式(2.1.4)代入初始条件得

$$\varphi(x) = F(x) + G(x) \tag{2.1.5}$$

$$\psi(x) = a[F'(x) - G'(x)] \tag{2.1.6}$$

对式(2.1.6)积分,得

$$F(x) - G(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi + C \tag{2.1.7}$$

其中 x_0 为任意一点,C 是积分常数。联立式(2.1.5)与式(2.1.7)解得

$$F(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{C}{2}$$

$$G(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi - \frac{C}{2}$$

将 F、G 代入式(2.1.4),即得初值问题式(2.1.1)、式(2.1.2)的解

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x + at) + \varphi(x - at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{2.1.8}$$

这个公式称为**达朗贝尔公式**。

例1 求下列初值问题的解

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & -\infty < x < +\infty \quad t > 0 \\ u|_{t=0} = \sin x,\ u_t|_{t=0} = \cos x & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

解:由公式(2.1.8)即得

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}[\sin(x+at) + \sin(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\cos\xi d\xi \\ &= \sin x\cos at + \frac{1}{2a}[\sin(x+at) - \sin(x-at)] \\ &= \sin x\cos at + \frac{1}{a}\cos x\sin at \end{aligned}$$

2. 解的物理意义

达朗贝尔公式有很鲜明的物理意义,由于式(2.1.8)是由式(2.1.4)得来,所以只需说明式(2.1.4)的物理意义。

(1) $G(x-at)$表示以速度 a 向 x 轴正向右移的行波,理由如下:

设在起始时刻 $t=0$时,$G(x-at)$在 x_0处有初始位移

$$G(x-at)\big|_{\substack{t=0\\x=x_0}} = G(x_0)$$

那么,在 t 时刻,凡满足

$$x - at = x_0$$

的点 x 处,也有同样的位移(图2-1)。

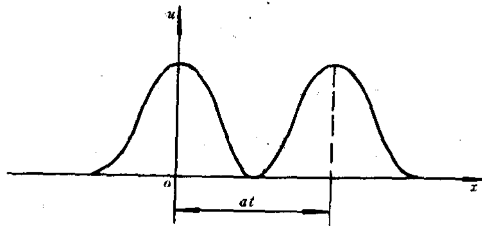


图2-1

$$G(x-at)|_{x-at=x_0} = G(x_0)$$

这就表明，在点 x_0 处的初始位移 $G(x_0)$，在 t 时刻，以速度 a 已无损耗地传播到 $x=x_0+at$ 处，因此，$G(x-at)$ 表示了右行波。

（2） $F(x+at)$ 表示以速度 a 向 x 轴负向左移的行波，称为左行波。

理由与右行波的讨论类似。所以，达朗贝尔公式表示右行波和左行波的迭加，故达朗贝尔公式法又称为**行波法**。

行波的传播特征，可在时空平面上作出说明(图2-2)，对右行波 $G(x-at)$，在时空平面上的 $M(x_0,0)$ 处。

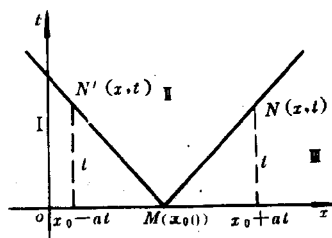


图2-2

$$G(x-at)|_{\substack{t=0\\x=x_0}} = G(x_0)$$

若动点 $N(x,t)$ 的横坐标 x 恒满足 $x=x_0+at$，则在点 $N(x,t)$ 处，总有 $G(x-at)|_{x=x_0+at}=G(x_0)$。动点 $N(x,t)$ 的轨迹是斜率为 $1/a$ 的直线 MN，其方程为

$$x - at = x_0 \qquad (2.1.9)$$

在时空平面上，由方程(2.1.9)表示的直线叫做右行波的**特征线**。在特征线上的每一点处，相应的位移都是 $G(x_0)$，即右行波 $G(x-at)$ 按初始位移沿特征线式(2.1.9)传播。

类似地讨论可知，在时空平面上由方程

$$x + at = x_0 \qquad (2.1.10)$$

表示的直线 MN' 是左行波的特征线(图2-2)。左行波 $F(x+at)$ 按初始位移 $F(x_0)$ 沿特征线式(2.1.10)传播。

一维波动方程的两条特征线

$$x \pm at = c \qquad (2.1.11)$$

对研究行波的传播起着重要的作用。

3. 依赖区域、影响区域和决定区域

在这一段里我们要讨论波函数与初始函数的关系，由达朗贝尔公式

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x + at) + \varphi(x - at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

可知，解 $u(x,t)$ 在 (x_0,t_0) 处的值，仅依赖于 x 轴的区域 $[x_0-at_0, x_0+at_0]$ 上的初始条件，而与该区域外的初始条件无关。这个区域(图2-3) $[x_0-at_0,x_0+at_0]$ 称为点 (x_0,t_0) 的**依赖区域**。它是由过点 (x_0,t_0) 而斜率分别为 $\pm\frac{1}{a}$ 的直线与 x 轴截得的区间。

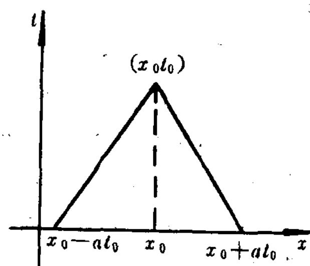


图2-3

如果在初始时刻 $t=0$，初值函数 φ 和 ψ 仅在区间 $[x_1,x_2]$ 上不为零。经过时间 t 后，受初始扰动影响的范围由不等式

$$x_1 - at \leqslant x \leqslant x_2 + at \quad (t > 0) \qquad (2.1.12)$$

所限定，而在此区域外仍处于静止状态。(参看图2-4)，由式(2.1.12)所表示的区域 G 称为区间 $[x_1,x_2]$ 的**影响区域**。

现在来考查 x 轴上区间 $[x_1,x_2]$ 上的初始条件能够确定哪个范围的 u 值。过 x_1 作斜率为 $\frac{1}{a}$ 的直线 $x=x_1+at$，过 x_2 作斜率为 $-\frac{1}{a}$ 的直线 $x=x_2-at$，它们和区间 $[x_1,x_2]$ 构成一个三角形区域(图2-5)。在此三角形区域内任一点 (x,t) 的依赖区域均落在区间 $[x_1,x_2]$ 内部，所以，在此三角形区域中解的值就完全由区间 $[x_1,x_2]$ 上的初始条件决定，而与此区间外的初始条件无关。因此，这个区域就称为区间 $[x_1,x_2]$ 的**决定区域**。

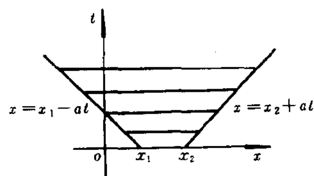


图2-4

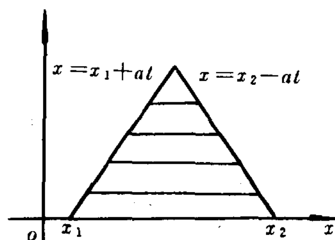


图2-5

由上述讨论可见，(x,t)平面上斜率为$\pm\frac{1}{a}$的直线$x=x_0\pm at$，即方程(2.1.1)的两条特征线，对一维波动方程的研究起着重要的作用。因为波动实际上是沿特征线传播的，所以行波法又称**特征线法**。

§2.2 多维齐次波动方程的初值问题

现在讨论波在无界空间的传播，即三维波动方程的初值问题，表示如下：

$$
\begin{cases}
u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}) \quad -\infty<x,y,z<+\infty \quad t>0 & (2.2.1) \\
u|_{t=0}=\varphi(x,y,z) \quad -\infty<x,y,z<+\infty & (2.2.2) \\
u_t|_{t=0}=\psi(x,y,z) & (2.2.3)
\end{cases}
$$

从形式上看，三维初值问题和一维初值问题是相似的，差异仅仅是点的坐标依赖于三个变量，如果我们能将它转化为用一个变量来描述，即可利用达朗贝尔公式求解。

1. 球对称三维波动方程的解

在球对称的情况下，波函数u与θ和φ无关，即$u=u(r,t)$。这

时方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) \tag{2.2.4}$$

因为 $r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+2\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}$，方程(2.2.4)可写成

$$\frac{\partial^2 (ru)}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}$$

由达朗贝尔公式，其解为

$$u(r,t) = \frac{1}{r}[F(r+at)+G(r-at)] \tag{2.2.5}$$

由此可见，在球对称下，波是以球心为中心沿半径传播的，且在同一球面上波的振幅相同。

2. 三维波动方程的泊松公式

现在来研究求解三维波动方程的初值问题式(2.2.1)、式(2.2.2)、式(2.2.3)，即

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\nabla^2 u & -\infty < x,y,z < +\infty \quad t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x,y,z),\ u_t|_{t=0} = \psi(x,y,z) & -\infty < x,y,z < +\infty \end{cases}$$

前段球对称的情况，给了我们求解这个问题的一个启示：为求得 $u(x,y,z,t)$ 的值，先求 u 在以点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为球心，r 为半径的球面上的平均值 $\bar{u}(M,r,t)$，然后令 $r\to 0$，则这个平均值的极限就是 u 在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 和时刻为 t_0 时的值。这种求解方法称为**球面均值法**。

下面就用这种方法导出求解三维波动方程初值问题的**泊松公式**。

设 $S_r^{M_0}$ 是以点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为中心，r 为半径的球面，引入波函数 $u(M,t)$ 沿球面 S_r^M 的球面平均值函数

$$\bar{u}(r,t) = \frac{1}{4\pi r^2}\iint_{S_r^{M_0}} u(\xi,\eta,\zeta,t)\mathrm{d}S \tag{2.2.6}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_1^{M_0}} u(\xi,\eta,\zeta,t)\mathrm{d}\omega$$

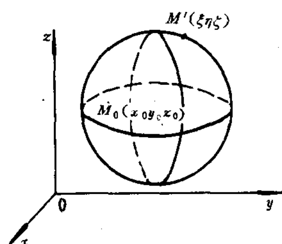


图2-6

其中 $\xi = x + r\sin\theta\cos\varphi$, $\eta = y + r\sin\theta\sin\varphi$, $\zeta = z + r\cos\theta$ 是球面 S_r^M 上点的坐标，$\mathrm{d}S$ 是 S_r^M 上的面积元素，S_1^M是以 M 为球心半径为1的球面，$\mathrm{d}\omega$ 是 S_1^M的面积元素(参见图2-6)。

当 $r \to 0$, $t = t_0$ 时, $u(M,t) \to u(M_0,t_0)$，代入式(2.2.6)并利用积分中值定理得

$$\bar{u}(0,t_0) = u(M_0,t_0)$$

容易验证，$\bar{u}$ 满足球对称三维波动方程。事实上，将方程(2.2.1)在球体 $V_r^{M_0}$ 内积分得

$$\iiint\limits_{V_r^{M_0}} u_{tt}\mathrm{d}V = a^2\iiint\limits_{V_r^{M_0}} \nabla^2 u\mathrm{d}V \tag{2.2.7}$$

由高斯公式得

$$a^2\iiint\limits_{V_r^{M_0}} \nabla^2 u\mathrm{d}V = a^2\iint\limits_{S_r^{M_0}} \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S$$

$$= a^2\iint\limits_{S_r^{M_0}} \frac{\partial u}{\partial r} r^2\mathrm{d}\omega = 4\pi a^2 r^2\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}$$

式(3.2.7)左端的积分

$$\iiint\limits_{V_r^{M_0}} u_{tt}\mathrm{d}V = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\iiint\limits_{V_r^{M_0}} u\mathrm{d}V$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^r\iint\limits_{S_r^{M_0}} u\rho^2\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\omega = 4\pi\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^r \bar{u}\rho^2\mathrm{d}\rho$$

故有

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^r \bar{u}\rho^2 \mathrm{d}\rho = a^2 r^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}$$

将上式两端对 r 求导

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r^2\bar{u}) = a^2 \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^2\partial \bar{u}}{\partial r}\right)$$

整理后得

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\bar{u}) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\bar{u})$$

其通解为

$$r\bar{u} = F(r + at,\ M_0) + G(r - at,\ M_0) \tag{2.2.8}$$

为了求得原来问题的解。将式(2.2.8)对 r 求导

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{u}) &= r\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \bar{u} \\ &= F'(r + at,\ M_0) + G'(r - at, M_0)\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

当 $r\to 0, t=t_0$ 时有

$$u(M_0,t_0) = \bar{u}(0,t_0) = F'(at_0,M_0) + G'(-at_0,M_0)$$

再利用初始条件确定任意函数 F 和 G。将式(2.2.8)对 t 求导得

$$r\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = aF'(r + at,\ M_0) - aG'(r - at, M_0) \tag{2.2.10}$$

令 $r\to 0$，$t=t_0$ 时

$$F'(at_0,\ M_0) = G'(-at_0, M_0)$$

由此得

$$u(M_0,t_0) = 2F'(at_0,M_0) \tag{2.2.11}$$

联立式(2.2.9)、式(2.2.10)消去 $G'(r-at,M_0)$，并取 $t=0$ 得

$$\begin{aligned}2F'(r,M_0) &= \left[\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{u}) + \frac{r}{a}\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}\right]_{t=0} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_r^{M_0}}\frac{u}{r}\mathrm{d}S + \frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_r^{M_0}}\frac{u}{r}\mathrm{d}S\right]_{t=0} \\ &= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r}\iint\limits_{S_r^{M_0}}\frac{\varphi}{r}\mathrm{d}S + \frac{1}{4\pi a}\iint\limits_{S_r^{M_0}}\frac{\psi}{r}\mathrm{d}S\end{aligned}$$

在上式中用 at 取代 r，则 $\frac{\partial}{\partial r}=\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}$。由式(2.3.11)得

$$u(x_0,y_0,z_0,t_0)=\frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_{at}^{M_0}}\frac{\varphi(\xi,\eta,\zeta)}{r}\mathrm{d}S+\frac{1}{4\pi a}\iint_{S_{at}^{M_0}}\frac{\psi(\xi,\eta,\zeta)}{r}\mathrm{d}S$$

略去(M_0,t_0)中的角标"0"即得原问题解的表达公式

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_{at}^{M}}\frac{\varphi(\xi,\eta,\zeta)}{r}\mathrm{d}S+\frac{1}{4\pi a}\iint_{S_{at}^{M}}\frac{\psi(\xi,\eta,\zeta)}{r}\mathrm{d}S \tag{2.2.12}$$

式(2.2.12)称为三维波动方程初值问题的**泊松公式**。

具体计算时，常将式(2.2.12)化为球面坐标的形式，即

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a}$$
$$\cdot\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\varphi(x+at\sin\theta\cos\varphi,\ y+at\sin\theta\sin\varphi,z+at\cos\theta)}{at}\right.$$
$$\cdot(at)^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$
$$+\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\psi(x+at\sin\theta\cos\varphi,\ y+at\sin\theta\sin\varphi,\ z+at\cos\theta)}{at}$$
$$\left.\cdot(at)^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\right]$$

例2 利用泊松公式求解定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\nabla^2 u & -\infty<x,y,z<+\infty \quad t>0\\ u|_{t=0}=x^3+y^2z,\ u_t|_{t=0}=0\end{cases}$$

解：由泊松式有：

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cdot\frac{(x+at\sin\theta\cos\varphi)^3+(y+at\sin\theta\sin\varphi)^2(z+at\cos\theta)}{at}$$
$$\cdot(at)^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\Big[t\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\big[x^3 + 3x^2at\sin\theta\cos\varphi + 3xa^2t^2\sin^2\theta\cos^2\varphi \\
&\quad + a^3t^3\sin^3\theta\cos^3\varphi + y^2z + y^2at\cos\theta + 2yzat\sin\theta\sin\varphi \\
&\quad + 2aya^2t^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi + za^2t^2\sin^2\theta\sin^2\varphi \\
&\quad + a^3t^3\sin^2\theta\cos\theta\sin^2\varphi\big]\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\
&= x^3 + y^2z + 3a^2t^2y + za^2t^2
\end{aligned}
$$

3. 二维波动方程柯西问题的泊松公式

现在我们研究二维波动方程的柯西问题

$$
\begin{cases}
u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) \\
\qquad -\infty < x, y < +\infty \quad t > 0 & (2.2.13) \\
u|_{t=0} = \varphi(x,y),\ u_t|_{t=0} = \varphi(x,y) \\
\qquad -\infty < x, y < +\infty & (2.2.14)
\end{cases}
$$

二维波动方程的柯西问题，可视为三维波动方程柯西问题的特殊情形，即波函数 u 与初始条件 φ,ψ 都与自变 z 无关的情形，从而我们可利用三维波动方程初值问题的泊松公式，求得二维波动方程初值问题的解。这种利用高维问题的解得出低维问题的解的方法称为**降维法**。

在三维波动方程柯西问题的泊松公式

$$
u(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_{at}^M}\frac{\varphi(\xi,\eta,\zeta)}{r}\mathrm{d}S + \frac{1}{4\pi a}\iint\limits_{S_{at}^M}\frac{\psi(\xi,\eta,\zeta)}{r}\mathrm{d}S
$$

中，积分是在三维空间 (x,y,z) 中的球面 S_{at}^M 上进行的。由于 φ 及 ψ 都是与 z 无关的柱形函数，因此在球面上的积分可以化为球面在过 M 点的 $z=$ 常数的平面上的投影 Σ_{at}^M：$(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\leqslant a^2t^2$ 上的积分，注意到

$$
\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}s\cdot\cos\gamma
$$

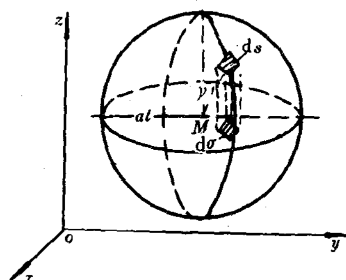


图2-7

其中 γ 为这两个面积元素法线方向间的夹角(图2-7)。又

$$\cos\gamma=\frac{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}{at}$$

再注意到上下半球面的积分都化成同一圆 Σ_{at}^M 上的积分。于是得到

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{\Sigma_{at}^M}\frac{\varphi(\xi,\eta)}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{\Sigma_{at}^M}\frac{\psi(\xi,\eta)}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{2.2.15}$$

式(2.2.15)称为二维波动方程初值问题的**泊松公式**

在实际计算时,常将它化为极坐标形式,即

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\Big[\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(x+r\cos\theta,y+r\sin\theta)}{\sqrt{(at)^2-r^2}}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$+\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\frac{\psi(x+r\cos\theta,y+r\sin\theta)}{\sqrt{(at)^2-r^2}}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\Big] \tag{2.2.16}$$

降维法不仅适用于波动方程,也适用于某些其它类型的方程。在很多情况下,该方法能从多个自变量方程的定解公式中,推导出自变量较少的方程的解。

§2.3 非齐次波动方程的初值问题

1. 一维非齐次波动方程的初值问题

考察强迫振动情形的初值问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx} + f(x,t) & -\infty < x < +\infty \quad t > 0 \quad (2.3.1) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x) & -\infty < x < +\infty \quad (2.3.2) \end{cases}$$

其中 φ 和 ψ 是定义在 x 轴上的光滑函数。

应用迭加原理，初值问题式(2.3.1)、式(2.3.2)可分解成以下两个初值问题：

$$(\mathrm{I})\begin{cases} u_{tt}^{(1)} = a^2u_{xx}^{(1)} & -\infty < x < +\infty \quad t > 0 \quad (2.3.3) \\ u^{(1)}|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t^{(1)}|_{t=0} = \psi(x) & -\infty < x < +\infty \quad (2.3.4) \end{cases}$$

$$(\mathrm{II})\begin{cases} u_{tt}^{(2)} = a^2u_{xx}^{(2)} + f(x,t) & -\infty < x < +\infty \quad t > 0 \quad (2.3.5) \\ u^{(2)}|_{t=0} = 0,\ u_t^{(2)}|_{t=0} = 0 & -\infty < x < +\infty \quad (2.3.6) \end{cases}$$

问题(Ⅰ)的求解已讨论过。对于问题(Ⅱ)，我们利用齐次化原理去求解，即利用齐次方程的初值问题的解来构造非齐次方程的零初值问题的解。

定理(齐次化原理) 若 $W(x,t;\tau)$是初值问题

$$\begin{cases} W_{tt} = a^2W_{xx} & -\infty < x < +\infty \quad t > \tau \\ W|_{t=\tau} = 0 \quad W_t|_{t=\tau} = \varphi(x,\tau) \end{cases} \quad (2.3.7)$$

的解，其中 τ 为参数，则

$$u^{(2)}(x,t) = \int_0^t W(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau \quad (2.3.8)$$

就是问题(Ⅱ)的解。

证： 利用含参变量积分的微分法，将(2.3.8)式对 t 求导得

$$u_t^{(2)} = W(x,t;t) + \int_0^t W_t(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$= \int_0^t W_t(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (2.3.9)$$

$$u_{tt}^{(2)} = W_t(x,t;t) + \int_0^t W_{tt}(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$= f(x,t) + \int_0^t W_{tt}(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (2.3.10)$$

由于式(2.3.8)中积分限与 x 无关。因此

$$u_{xx}^{(2)} = \int_0^t W_{xx}(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (2.3.11)$$

所以

$$u_{tt}^{(2)} = f(x,t) + \int_0^t a^2 W_{xx}(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$= f(x,t) + a^2 u_{xx}$$

即 $u^{(2)}(x,t) = \int_0^t W(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau$ 满足非齐次方程。下面验证它亦满足初始条件。注意到式(2.3.8)、式(2.3.9)。显然有

$$u^{(2)}|_{t=0} = 0,\ u_t^{(2)}|_{t=0} = 0$$

故 $u(x,t)$ 是问题(Ⅱ)的解。因此,问题归结到求解式(2.3.7)。

令 $t' = t - \tau$,式(2.3.7)变成

$$\begin{cases} W_{t't'} = a^2 W_{xx} \\ W|_{t'=0} = 0,\ W_{t'}|_{t'=0} = f(x,\tau) \end{cases}$$

当 f 为一阶连续可微时,有

$$W(x,t;\tau) = \frac{1}{2a}\int_{x-at'}^{x+at'} f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi$$

$$= \frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi \qquad (2.3.12)$$

所以

$$u^{(2)}(x,t) = \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau \qquad (2.3.13)$$

故式(2.3.1)、式(2.3.2)的解为

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau \qquad (2.3.14)$$

例3 求无界弦强迫振动的柯西问题

$$\begin{cases}u_{tt}=u_{xx}+1\\ u|_{t=0}=\sin x,\ u_t|_{t=0}=x\end{cases}$$

解:由式(2.3.14)得

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\sin(x+t)+\sin(x-t)]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\xi\mathrm{d}\xi$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\left(\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{2}[\sin(x+t)+\sin(x-t)]+xt+\frac{1}{2}t^2$$

2. 三维非齐次波动方程的初值问题

现在研究三维非齐次初值问题

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})+f(x,y,z,t) & (2.3.15)\\ u|_{t=0}=\varphi(x,y,z),\ u_t|_{t=0}=\psi(x,y,z) & (2.3.16)\end{cases}$$

与一维的情形类似,这个定解问题可分解为

$$(\text{I})\quad\begin{cases}\tilde{u}_{tt}=a^2(\tilde{u}_{xx}+\tilde{u}_{yy}+\tilde{u}_{zz})\\ \tilde{u}|_{t=0}=\varphi(x,y,z),\ \tilde{u}_t|_{t=0}=\psi(x,y,z)\end{cases}$$

及

$$(\text{II})\quad\begin{cases}V_{tt}=a^2(V_{xx}+V_{yy}+V_{zz})+f(x,y,z,t)\\ V|_{t=0}=0,\ V_t|_{t=0}=0\end{cases}$$

问题(Ⅰ)的解已由泊松公式(2.3.12)给出,为求问题(Ⅱ)的解,由齐次化原理,先求下述初值问题的解

$$\begin{cases}W_{tt}=a^2(W_{xx}+W_{yy}+W_{zz})\\ W|_{t=\tau}=0,\ W_t|_{t=\tau}=f(x,y,z,\tau)\end{cases}\qquad (2.3.17)$$

由公式(2.2.12)得式(2.3.17)的解为

$$W(x,y,z,t,\tau)=\frac{1}{4\pi a}\iint\limits_{S_{a(t-\tau)}^{M}}\left[\frac{f(\xi,\eta,\zeta,\tau)}{r}\right]_{r=a(t-\tau)}\mathrm{d}S$$

从而有

$$\begin{aligned}V(x,y,z,t)&=\int_0^t W(x,y,z,t,\tau)\mathrm{d}\tau\\&=\frac{1}{4\pi a}\int_0^t\iint\limits_{S_{a(t-\tau)}^{M}}\left[\frac{f(\xi,\eta,\zeta,\tau)}{r}\right]_{r=a(t-\tau)}\mathrm{d}S\mathrm{d}\tau\\&=\frac{1}{4\pi a^2}\int_0^{at}\iint\limits_{S_r^M}\frac{f(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a})}{r}\mathrm{d}S\mathrm{d}r\quad\left(\tau=t-\frac{r}{a}\right)\\&=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_{r\leqslant at}\frac{f\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a}\right)}{r}\mathrm{d}V\end{aligned}\tag{2.3.18}$$

式(2.3.18)表明：在时刻 t 位于 $M(x,y,z)$ 处，函数 u 的数值由函数 f 在时刻 $\tau=t-\frac{r}{a}$ 处的值在球中的积分表出，故这样的积分称为延滞位势或**推迟势**。

与一维的情形完全类似，可以验证函数

$$V(x,y,z,t)=\int_0^t W(x,y,z,t;\tau)\mathrm{d}\tau$$

的确是问题(Ⅱ)的解。

对于二维的情况，可进行类似的讨论。

例4 求解非齐次波动方程的初值问题

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})+2(y-t)\\u|_{t=0}=0,\ u_t|_{t=0}=x^2+yz\end{cases}$$

解：将非齐次波动方程的初值问题分解成

$$(\text{Ⅰ})\qquad\begin{cases}\tilde{u}_{tt}=a^2(\tilde{u}_{xx}+\tilde{u}_{yy}+\tilde{u}_{zz})\\\tilde{u}|_{t=0}=0,\ \tilde{u}_t|_{t=0}=x^2+yz\end{cases}$$

及

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} V_{tt} = a^2(V_{xx}+V_{yy}+V_{zz}) + 2(y-t) \\ V|_{t=0} = 0,\ V_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

(Ⅰ)的解由泊松公式给出，(Ⅱ)的解利用推迟势求得，故

$$u(x,y,z,t) = \tilde{u} + V$$

$$= \frac{1}{4\pi a}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}[(x+at\sin\theta\cos\varphi)^2 + (y+at\sin\theta\sin\varphi)(z+at\cos\theta)]$$

$$\cdot at\sin\theta d\theta d\varphi + \frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_{r\leqslant at}\frac{2(y+at\sin\theta\sin\varphi - t + \frac{r}{a})}{r}dV = \mathrm{I} + \mathrm{II}$$

$$\mathrm{I} = \frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}[x^2\sin\theta + 2xat\sin^2\theta\cos\varphi + a^2t^2\sin^3\theta\cos^2\varphi + yz\sin\theta$$

$$+ yat\cos\theta\sin\theta + zat\sin^2\theta\sin\varphi + a^2t^2\sin^2\theta\cos\theta\sin\varphi]d\theta d\varphi$$

$$= \frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}[2x^2 + \pi xat\cos\varphi + \frac{4}{3}a^2t^2\cos^2\varphi + 2yz + \frac{\pi}{2}zat\sin\varphi]d\varphi$$

$$= x^2t + \frac{1}{3}a^2t^3 + yzt$$

$$\mathrm{II} = \frac{1}{4\pi a^2}\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{2(y+at\sin\theta\sin\varphi - t + \frac{r}{a})}{r}r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi$$

$$= yt^2 - \frac{1}{3}t^3$$

所以

$$u(x,y,z,t) = \mathrm{I} + \mathrm{II} = (x^2+yz)t + yt^2 + \frac{1}{3}(a^2-1)t^3$$

习 题 二

1. 求初值问题

$$\begin{cases} u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0 \\ u|_{y=0} = 3x^2,\ u_y|_{y=0} = 0 \end{cases}$$

的解。

2. 求初值问题 $(-at<x<at\quad t>0)$

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u|_{x-at=0} = \varphi(x),\ u_t|_{x+at=0} = \psi(x) \quad (\varphi(0) = \psi(0)) \end{cases}$$

的解。

3. 求解波动方程初值问题

(1) $$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = t\sin x \\ u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = \sin x \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \dfrac{tx}{(1+x^2)^2} \\ u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = \dfrac{1}{1+x^2} \end{cases}$$

(3) $$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = x^2 \\ u|_{t=0} = x,\ u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

4. 利用泊松公式求解波动方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \\ u|_{t=0} = x^3 + yz,\ u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

5. 对二维非齐次波动方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = f(x,y,t) \\ u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

导出其解的表达式。

6. 求解二维波动方程初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0 \\ u|_{t=0} = x^2(x+y),\ u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

7. 求解初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = c^2 u \\ u|_{t=0} = \varphi(x,y),\ u_t|_{t=0} = \psi(x,y) \end{cases}$$

(提示:在三维波动方程中,令 $v(x,y,z,t) = e^{\frac{cz}{a}} u(x,y,t)$)

第三章　分离变量法

第二章讨论了无界问题，导出了初值问题的求解公式。这一章讨论有界问题。在实际问题中，当边界条件的影响不能略去的时候，我们就遇到有界问题。例如有界弦的振动；电磁波在波导体中的传播；中子在核反应堆内的扩散等。

分离变量法是解决有界问题的有效方法，是求解初边值问题最常用和最基本的一种解法。特别是在区域为矩形、柱面和球面等情况下，使用更为普遍。能用分离变量法来解决的这类问题中，包含了范围很广的数学物理问题。这个方法的基本特点是，将未知函数 $u(x,t)$ 按自变量 x 和 t 分开，以便把偏微分方程化为常微分方程来求解，我们将以一维波动方程，热传导方程的某些定解问题为例，说明分离变量法的步骤和实质。

§3.1　有界弦的自由振动

1. 物理模型

分离变量法的物理背景是波动现象。波动现象有两个重要特性。第一，具有迭加性，第二，波函数可变量分离，即波函数可表示成 $u(x,t)=c(t)\sin\lambda x$。为简明，考察两端固定的弦的自由振动情形，定解问题是

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx} \quad 0<x<l \quad t>0 \\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t|_{t=0}=\psi(x) \qquad 0<x<l \\ u|_{x=0}=0,\ u|_{x=l}=0\end{cases}$$

其中 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是两个定义在 $(0,l)$ 上的已知函数。

从物理学知道，两端固定的弦因初始干扰而产生的自由振动的波形，是各种不同频率的正弦波的迭加，例如弦乐器由振动发出的声音，是各种不同频率的单音的迭加，振动时，每种单音形成正正弦曲线，曲线的两端及中间有若干个不动的点，称为节点。在节间有振幅最大的点，称为腹点。这些正弦波在物理上称为驻波，驻波的分析表达式为

$$\tilde{u}(x,t) = c(t)\sin\lambda x$$

由于端点是节点，故 λ 只能取

$$\lambda = \lambda_n = \frac{n\pi}{l},\ n = 1,2,3,\cdots$$

于是

$$\tilde{u}(x,t) = u_n(x,t) = c_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x \quad n = 1,2,3,\cdots$$

代入波动方程得

$$\frac{\mathrm{d}^2c_n(t)}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 c_n(t) = 0 \quad n = 1,2,3,\cdots$$

此常微分方程的通解是

$$c_n(t) = A_n\cos\frac{n\pi a}{l}t + B_n\sin\frac{n\pi a}{l}t$$

整理得

$$c_n(t) = \alpha_n\cos(\omega_n t + \theta_n)$$

其中 $\alpha_n>0$，θ_n 是任意常数，于是驻波可表成

$$u_n(x,t) = \alpha_n\cos(\omega_n t + \theta_n)\sin\frac{n\pi}{l}x \quad n = 1,2,3,\cdots$$

这种驻波的振动频率

$$\omega_n = \frac{n\pi a}{l} = \frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

称为弦线的**固有频率**。因此弦线发出的最低音的频率为$\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$，称为该弦的**基音**。其余的频率都是它的整数倍，称为**泛音**。一般复

杂的声波是由这种驻波迭加而得到，因此弦振动方程定解问题的解可以写成

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos(\omega_n t+\theta_n)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

用这样的方法求弦振动方程的**初边值问题**(**混合问题**)的解的方法，称为**驻波法**。

综上所述可见，驻波法的主要精神是把解表示为满足齐次方程和齐次边界条件，且可分离变量的特解的迭加，所以驻波法也称为**分离变量法**。

2.分离变量法

现在介绍如何用分离变量法求解混合问题(初边值问题)。

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} \quad 0<x<l \quad t>0 & (3.1.1) \\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t|_{t=0}=\psi(x) \quad 0<x<l & (3.1.2) \\ u|_{x=0}=u|_{x=l}=0 \qquad t>0 & (3.1.3) \end{cases}$$

设方程(3.1.1)具有可分离变量且满足齐次边界条件(3.1.3)的非零特解

$$u(x,t)=X(x)T(t) \tag{3.1.4}$$

其中 X、T 均为待定的单元函数。

将式(3.1.4)代入方程(3.1.1)得

$$X(x)T''(t)-a^2X''(x)T(t)=0$$

即

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda \tag{3.1.5}$$

由于式(3.1.5)左端仅依赖于 t，右端仅依赖于 x 的函数。故 $-\lambda$ 只能是一常数(其值待定)。这样，方程(3.1.1)就被分成两个常微分方程

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \qquad (3.1.6)$$

及

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \qquad (3.1.7)$$

由于非零解 $u(x,t)$ 满足齐次边界条件式(3.1.3)，故由

$$X(0)T(t) = 0,\ X(l)T(t) = 0$$

得

$$X(0) = 0,\ X(l) = 0 \qquad (3.1.8)$$

为确定 $X(x)$，需求常微分方程边值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0,\ X(l) = 0 \end{cases} \qquad (3.1.9)$$

的非零解。

常微分方程边值问题式(3.1.9)称为**固有值问题或特征值问题**。使得固有值问题有非零解的 λ 值，称为**固有值或特征值**，与固有值相对应的非零解，称为**固有函数或特征函数**。

方程(3.1.7)的通解随 $\lambda>0$，$\lambda=0$ 和 $\lambda<0$ 而不同，下面分三种情况讨论。

(1) 当 $\lambda<0$ 时，方程(3.1.7)的通解为

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

由边界条件式(3.1.8)得

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0 \end{cases}$$

因行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}l} & e^{-\sqrt{-\lambda}l} \end{vmatrix} \neq 0$$

所以 $C_1=C_2=0$，故 $\lambda<0$ 时没有非零解。

(2) 当 $\lambda=0$ 时，方程(3.1.7)的通解为

$$X(x) = C_1 + C_2 x$$

由边界条件(3.1.8)仍得 $C_1=C_2=0$，同样无非零解。

(3) 当 $\lambda>0$ 时,方程(3.1.7)的通解为

$$X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}\,x+C_2\sin\sqrt{\lambda}\,x$$

由边界条件式(3.1.8)得

$$\begin{cases}C_1=0\\ C_2\sin\sqrt{\lambda}\,l=0\end{cases}$$

由于 $C_2\neq0$(否则 $X(x)\equiv0$),必须 $\sin\sqrt{\lambda}\,l=0$。于是

$$\lambda=\lambda_k=\frac{k^2\pi^2}{l^2}\ (k=1,2,3,\cdots) \qquad (3.1.10)$$

与这些固有值相对应的固有函数是

$$X_k(x)=C_k\sin\frac{k\pi x}{l}\quad (k=1,2,3,\cdots) \qquad (3.1.11)$$

对于每一个固有值 λ_k,方程

$$T''_k(t)+\frac{a^2k^2\pi^2}{l^2}T_k(t)=0$$

的通解是

$$T_k(t)=a_k\cos\frac{k\pi a}{l}t+b_k\sin\frac{k\pi a}{l}t\quad (k=1,2,3,\cdots)$$

(3.1.12)

其中 a_k,b_k 为任意常数。于是,得到了方程(3.1.1)满足齐次边界条件式(3.1.3)的可分离变量的特解:

$$\begin{aligned}u_k(x,t)&=X_k(x)T_k(t)\\&=\left(A_k\cos\frac{k\pi a}{l}t+B_k\sin\frac{k\pi a}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x\end{aligned}$$

其中 $A_k=C_ka_k$, $B_k=C_kb_k$ 是任意常数。

在一般情况下,任何一个 $u_k(x,t)$ 都不会满足初始条件式(3.1.12)。但由于方程(3.1.1)及边界条件式(3.1.3)都是线性齐次的,根据迭加原理,可得级数解

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos\frac{k\pi a}{l}t+B_k\sin\frac{k\pi a}{l}t)\sin\frac{k\pi}{l}x$$

(3.1.13)

当级数式(3.1.13)一致收敛且关于 x 和 t 能逐项微分两次时,可以证明,级数解式(3.1.13)也满足方程(3.1.1)和边界条件式(3.1.3)。

现在适当地选择系数 A_k、B_k,使级数解式(3.1.13)满足初始条件。由初始条件式(3.1.2)应有

$$u|_{t=0} = \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{k\pi}{l}x$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{k\pi a}{l}\sin\frac{k\pi}{l}x$$

如果 $\varphi(x)$、$\psi(x)$都能在$[0,l]$上展开成正弦级数,则富里埃级数的系数为

$$\begin{cases} A_k = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}x \\ B_k = \dfrac{2}{k\pi a}\displaystyle\int_0^l \psi(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}x \end{cases} \tag{3.1.14}$$

将式(3.1.14)代入式(3.1.13)就得到混合问题式(3.1.1)、式(3.1.2)、式(3.1.3)的形式解。

可以证明,当 $\varphi(x)$三阶连续可微,$\psi(x)$二阶连续可微,且 $\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0$ 时,定解问题式(3.1.1)、式(3.1.2)、式(3.1.3)的解存在且唯一,它可以表示成级数式(3.1.13)的形式,其系数 A_k、B_k 由式(3.1.14)确定。

注Ⅰ 用分离变量法求解定解问题的关键步骤是确定固有函数与运用迭加原理,这些运算之所以能够进行,就是因为泛定方程和边界条件都是线性齐次的。

注Ⅱ 对于线性齐次方程与齐次边界条件的定解问题,分离变量法的具体步骤是

第一步:设方程满足边界条件的可分离变量的解 $u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$,从而得关于 $X(x)$的固有值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

和关于 $T(t)$ 的常微分方程

$$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0$$

第二步：解固有值问题，求出固有值 λ_k 和固有函数 $X_k(x)$ 后，对于每一个 λ_k，求出常微分方程

$$T''_k(t) + a^2\lambda_k T_k(t) = 0$$

的通解 $T_k(t)$。得到满足方程及边界条件的一系列特解 $u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t)$。

第三步：设定解问题的解为 $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos\frac{k\pi a}{l}t + B_k\sin\frac{k\pi a}{l}t)\sin\frac{k\pi}{l}x$，由初始条件确定 $u(x,t)$ 中所包含的待定系数。

例 1 弦的拨动问题

考虑两端固定于 $x=0$，$x=l$ 处张紧的弦。设开始时在 $x=c$ $(0<c<l)$ 处弦被拉起一个高度 h 然后放开，弦作自由振动，见图 3-1。试求解此问题。

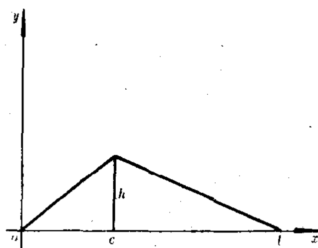


图 3-1

解：列出定解问题

$$
\begin{cases}
u_{tt} = a^2 u_{xx} \\
u|_{t=0} = \varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{hx}{c} & 0 \leqslant x \leqslant c \\ \dfrac{h(l-x)}{l-c} & c < x \leqslant l \end{cases} \\
u_t|_{t=0} = \psi(x) = 0 \\
u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0 \quad t \geqslant 0
\end{cases}
$$

设 $u(x,t)=X(x)T(t)$，代入方程得

$$
\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda
$$

由边界条件得固有值问题

$$
\begin{cases}
X''(x) + \lambda X = 0 \\
X(0) = X(l) = 0
\end{cases}
$$

其固有值为

$$
\lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{l^2} \quad (k = 1,2,3,\cdots)
$$

相应的固有函数为

$$
X_k = \sin\frac{k\pi}{l}x \quad (k = 1,2,3,\cdots)
$$

将 λ_k 代入关于 T 的方程得

$$
T''_k(t) + \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 T = 0 \quad (k = 1,2,3,\cdots)
$$

其通解为

$$
T_k(t) = a_k\cos\frac{k\pi a}{l}t + B_k\sin\frac{k\pi a}{l}t \quad (k = 1,2,3,\cdots)
$$

于是有

$$
u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi a}{l}t + B_k\sin\frac{k\pi a}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x
$$

由初始条件得

$$
u_t|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty}B_k\frac{k\pi a}{l}\sin\frac{k\pi}{l}x = 0
$$

故

$$B_k = 0 \qquad (k = 1,2,3,\cdots)$$

$$u|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{k\pi}{l}x = \begin{cases} \dfrac{h}{c}x & 0 \leqslant x \leqslant c \\ \dfrac{h(l-x)}{l-c} & c < x \leqslant l \end{cases}$$

故

$$A_k = \frac{2}{l}\left[\int_0^c \frac{h}{c}x\sin\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}x + \int_c^l \frac{h(l-x)}{l-c}\sin\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{2hl^2}{k^2\pi^2c(l-c)}\sin\frac{k\pi}{l}c$$

于是

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2hl^2}{\pi^2c(l-c)}\frac{1}{k^2}\sin\frac{k\pi c}{l}\cos\frac{k\pi a}{l}t\sin\frac{k\pi x}{l}$$

例 2　弦的敲击问题

考虑两端固定于 $x=0, x=l$ 处无初始位移的张紧的弦，开始时在弦 $x=c$ 处被敲击而具有初速 v_0，其余各点初速呈线性分布，试求解此问题。

解：列出定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx} & 0 < x < l \quad t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) = 0,\ u_t|_{t=0} = \begin{cases} \dfrac{v_0}{c}x & 0 \leqslant x \leqslant c \\ \dfrac{v_0(l-x)}{l-c} & c < x \leqslant l \end{cases} \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

因为边界条件与例 1 同，所以固有值与固有函数仍为

$$\lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{l^2},\ X_k(x) = \sin\frac{k\pi}{l}x \quad (k = 1,2,3,\cdots)$$

由于 $\varphi(x)=0$，故 $A_k=0$

$$B_k = \frac{2}{k\pi a}\left[\int_0^c \frac{v_0}{c}x\sin\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}x + \int_c^l \frac{v_0(l-x)}{l-c}\sin\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{2v_0 l^3}{\pi^3 ac(l-c)} \cdot \frac{1}{k^3} \sin \frac{k\pi c}{l}$$

故得弦的位移

$$u(x,t) = \frac{2v_0 l^3}{\pi^3 ac(l-c)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \sin \frac{k\pi c}{l} \sin \frac{k\pi a}{l} t \sin \frac{k\pi}{l} x$$

§3.2 用分离变量法解其它定解问题

分离变量法不仅可用来解有界弦振动方程的混合问题，也可以用来解其它方程的某些定解问题，且基本步骤亦相同。

例 3 求长为 l 的均匀细杆热传导问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \quad 0 < x < l \quad t > 0 & (3.2.1) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \quad 0 < x < l & (3.2.2) \\ u|_{x=0} = 0,\ (u_x + hu)|_{x=l} = 0 \quad t > 0,\ h > 0 & (3.2.3) \end{cases}$$

的解。

解：仍用分离变量法解这个问题

设 $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ 满足式(3.2.1)和式(3.2.3)。于是 $X(x)$ 满足固有值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 & (3.2.4) \\ X(0) = 0,\ X'(l) + hX(l) = 0 & (3.2.5) \end{cases}$$

$T(t)$ 满足常微分方程

$$T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 \qquad (3.2.6)$$

解固有值问题式(3.2.4)、式(3.2.5)。经过与解弦振动方程混合问题类似地讨论得知：$\lambda \leqslant 0$ 时，无非零解，即 $X(x) \equiv 0$。当 $\lambda > 0$ 时，方程(3.2.4)的通解为

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$$

由边界条件 $X(0)=0$ 得 $A=0$，由 $X'(l)+hX(l)=0$ 得

$$\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l + h\sin\sqrt{\lambda}l = 0 \qquad (3.2.7)$$

为求 $\sqrt{\lambda}$，将上式改写成

$$\text{tg}\upsilon = \alpha\upsilon \qquad (3.2.8)$$

其中 $\upsilon=\sqrt{\lambda}\,l$，$\alpha=-\frac{1}{hl}$，方程(3.2.8)的根可看作是曲线 $y_1=\text{tg}\upsilon$ 与直线 $y_2=\alpha\upsilon$ 的交点的横坐标(如图 3-2)。

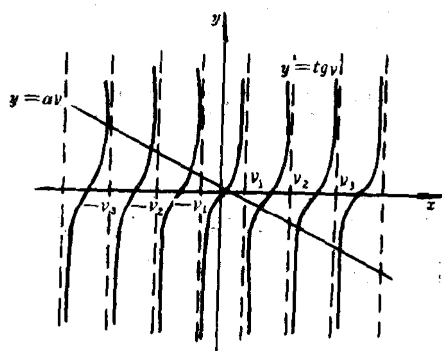


图 3-2

显然它们有无穷多个交点，于是方程(3.2.8)有无穷多个根，且关于原点对称。设方程的无穷多个正根为

$$\upsilon_1, \upsilon_2, \cdots, \upsilon_n, \cdots$$

于是固有值为

$$\lambda_k = \frac{\upsilon_k^2}{l^2} \qquad (k = 1,2,3,\cdots)$$

相应的固有函数是

$$X_k(x) = B_k \sin\sqrt{\lambda_k}\, x$$

再由式(3.2.6)解得

$$T_k(t) = A_k e^{-\lambda_k a^2 t} \qquad (k = 1,2,3,\cdots)$$

故得式(3.2.1)满足条件式(3.2.3)的一组特解

$$u_k(x,t) = X_k(x) \cdot T_k(t)$$

$$= C_k e^{-\lambda_k a^2 t} \sin\sqrt{\lambda_k}\, x \qquad (k = 1,2,3,\cdots)$$

设解为级数形式

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k\mathrm{e}^{-\lambda_k a^2 t}\sin\sqrt{\lambda_k}\,x \quad (3.2.9)$$

由初始条件式(3.2.2)得

$$\varphi(x)=u(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k\sin\sqrt{\lambda_k}\,x \qquad (3.2.10)$$

若 $\varphi(x)$ 在 $[0,l]$ 上满足狄里赫勒条件，则可展成关于 $\{\sin\sqrt{\lambda_k}\,x\}$ 的级数。令

$$L_k=\int_0^l\sin^2\sqrt{\lambda_k}\,x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^l(1-\cos^2\frac{\upsilon_k}{l}x)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{l}{2}-\frac{1}{4\upsilon_k}\sin2\upsilon_k$$

由固有函数系 $\{\sin\sqrt{\lambda_k}\,x\}$ 的正交性得

$$\int_0^l\varphi(x)\sin\sqrt{\lambda_k}\,x\mathrm{d}x=L_kC_k$$

即

$$C_k=\frac{1}{L_k}\int_0^l\varphi(x)\sin\sqrt{\lambda_k}\,x\mathrm{d}x \qquad (3.2.11)$$

将式(3.2.11)代入式(3.2.9)即得定解问题的解。

例4 考察一个半径为 ρ_0 的薄圆盘，上下两面绝热，圆周边缘温度分布为已知，求达到稳定状态时圆盘内的温度分布。

解：热传导的稳恒状态温度分布由拉普拉斯方程描述，即

$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad 0<x^2+y^2<\rho_0^2 \quad (3.2.12)$$

边界形状是圆周。在极坐标系下它的方程为 $\rho=\rho_0$，所以边界条件可表为

$$u|_{\rho=\rho_0}=f(\theta)$$

将方程(3.2.12)用极坐标表示得

$$\begin{cases}\Delta u=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0 \quad 0<\rho<\rho_0 & (3.2.13)\\ u(\rho_0,\theta)=f(\theta) \quad 0\leqslant\theta\leqslant2\pi & (3.2.14)\end{cases}$$

此外，因为自变量 ρ、θ 的取值范围分别为$[0,\rho_0]$与$[0,2\pi]$，又圆盘中心点的温度值决不可能是无穷的，且$(\rho,0)$与$(\rho,2\pi)$实际上表示同一点，故温度应该相同，因而有

有界条件

$$\lim_{\rho\to 0} u(\rho,\theta) < \infty \text{ 或 } u(0,\theta) < \infty \tag{3.2.15}$$

周期条件

$$\begin{cases} u(\rho,0) = u(\rho,2\pi) \\ \dfrac{\partial}{\partial\theta}u(\rho,\theta) = \dfrac{\partial}{\partial\theta}u(\rho,2\pi) \end{cases} \tag{3.2.16}$$

所以问题归结于求下列定解问题

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = 0 \quad 0 < \rho < \rho_0 \\ u(\rho_0,\theta) = \rho(\theta) \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \\ u(0,\theta) < \infty \\ u(\rho,0) = u(\rho,2\pi) \\ \dfrac{\partial}{\partial\theta}u(\rho,0) = \dfrac{\partial}{\partial\theta}u(\rho,2\pi) \end{cases}$$

先令

$$u(\rho,\theta) = R(\rho)\Phi(\theta) \tag{3.2.17}$$

代入方程(3.2.13)得

$$R''\Phi + \frac{1}{\rho}R'\Phi' + \frac{1}{\rho^2}R\Phi'' = 0,\ \frac{\rho^2R'' + \rho R'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi}$$

令其比值为常数 λ，得两个常微分方程

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0$$

$$\rho^2R'' + \rho R' - \lambda R = 0$$

再由式(3.2.15)、式(3.2.16)可得

$$R(0) < \infty \tag{3.2.18}$$

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi),\ \Phi'(0) = \Phi'(2\pi) \tag{3.2.19}$$

由此得两个常微分方程的定解问题

$$\begin{cases}\Phi'' + \lambda\Phi = 0 \\ \Phi(0) = \Phi(2\pi),\ \Phi'(0) = \Phi'(2\pi)\end{cases} \tag{3.2.20}$$

和

$$\begin{cases}\rho^2 R'' + \rho R' - \lambda R = 0 \\ R(0) < \infty\end{cases} \tag{3.2.21}$$

为了能定出固有值、固有函数，先解问题式(3.2.20)，采用与§3.1中同样的方法可以得到

当 $\lambda<0$ 时，问题式(3.2.20)无非零解；

当 $\lambda=0$ 时，它的解为 $\Phi_0(\theta)=a'_0$(常数)；

当 $\lambda>0$ 时，方程的通解是：

$$\Phi(\theta) = a'\cos\sqrt{\lambda}\,\theta + b'\sin\sqrt{\lambda}\,\theta$$

由周期性条件式(3.2.19)，$\sqrt{\lambda}$ 必须是正整数 k，至此，我们定出了固有值和固有函数分别为

$$\lambda = \lambda_k = k^2 \quad (k = 1,2,3,\cdots) \tag{3.2.22}$$

与

$$\Phi_k(\theta) = a'_k\cos k\theta + b'_k\sin k\theta \qquad (k = 1,2,3,\cdots) \tag{3.2.23}$$

往下解问题式(3.2.21)，其中的方程是欧拉(Euler)方程

$$\rho^2 R''_k + \rho^2 R'_k - k^2 R_k = 0$$

作代换 $\rho=e^t$，上式化为

$$\frac{d^2R_k}{dt^2} - k^2 R_k = 0$$

故其通解为

当 $\lambda=k^2$　$R_k=C_k e^{kt}+d_k e^{-kt}=C_k\rho^k+d_k\rho^{-k}$

当 $\lambda=0$　$R_k=C_0+d_0 t=C_0+d_0\ln\rho$

为了保证 $R(0)<\infty$，必须 $d_k=0$　$(k=0,1,2,\cdots)$故

$$R_k = C_k\rho^k \quad (k = 0,1,2,\cdots) \tag{3.2.24}$$

于是满足方程(3.2.13)和条件式(3.2.15)、式(3.2.16)的非零特解是

$$u_0(\rho,\theta) = R_0\Phi_0 \xlongequal{\text{记作}} \frac{a_0}{2}$$

$$u_k(\rho,\theta) = R_k\Phi_k = \rho^k(a_k\cos k\theta + b_k\sin k\theta) \quad (k = 1,2,3,\cdots)$$

其中

$$a_0 = 2a'_0c_0,\ a_k = c_ka'_k,\ b_k = c_kb'_k$$

都是任意常数。

利用迭加原理，方程(3.2.13)满足式(3.2.15)、式(3.2.16)的解可以表示为级数形式

$$u(\rho,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\rho^k(a_k\cos k\theta + b_k\sin k\theta) \quad (3.2.25)$$

最后，为确定系数 a_k,b_k。我们利用边界条件式(3.2.14)得

$$f(\theta) = u(\rho_0,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\rho_0^k(a_k\cos k\theta + b_k\sin k\theta) \quad (3.2.26)$$

因此，a_0，$\rho_0^ka_k$，$\rho_0^kb_k$ 就是 $f(\theta)$在$[0,2\pi]$上展开为富里埃级数时的系数，即有

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta)\mathrm{d}\theta \\ a_k = \dfrac{1}{\rho_0^k\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos k\theta\mathrm{d}\theta \qquad (k = 1,2,3,\cdots) \\ b_k = \dfrac{1}{\rho_0^k\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin k\theta\mathrm{d}\theta \end{cases} \quad (3.2.27)$$

将这些系数代入式(3.2.25)即得所求的解。

我们还可以将解写成另一种形式，将式(3.2.27)代入式(3.2.25)，经过简化后可得

$$\begin{aligned} u(\rho,\theta) &= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi}f(t)\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k\cos k(\theta - t)\mathrm{d}t\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k\cos k(\theta - t)\right]\mathrm{d}t \quad (3.2.28) \end{aligned}$$

利用下面已知的恒等式

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}n^{k}\cos k(\theta-t)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1-n^{2}}{1-2n\cos(\theta-t)+n^{2}}\quad(|n|<1)$$

可将解 $u(\rho,\theta)$ 的表达式(3.2.28)写为

$$u(\rho,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}f(t)\frac{\rho_{0}^{2}-\rho^{2}}{\rho_{0}^{2}+\rho^{2}-2\rho_{0}\rho\cos(\theta-t)}\mathrm{d}t\quad(\rho<\rho_{0})\tag{3.2.29}$$

公式(3.2.29)称为圆域内的泊松(Poisson)公式。

例 5 求两端自由的弦的自由振动所对应的混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^{2}u}{\partial t^{2}}-a^{2}\dfrac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}=0\quad 0<x<l\quad t>0 & (3.2.30)\\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=\psi(x)\quad 0<x<l & (3.2.31)\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}|_{x=0^{+}}=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}|_{x=l}=0\quad t>0 & (3.2.32)\end{cases}$$

的解。

解：设解 $u(x,t)=X(x)\cdot T(t)$，代入方程(3.2.30)并注意到条件式(3.2.32)得 $X(x)$ 满足固有值问题

$$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0 & (3.2.33)\\ X'(0)=Z'(l)=0 & (3.2.34)\end{cases}$$

及 $T(t)$ 满足的常微分方程

$$T''(t)+a^{2}\lambda T(t)=0\tag{3.2.35}$$

解固有值问题，当 $\lambda<0$ 时方程(3.2.33)的通解是

$$X(x)=Ae^{\sqrt{-\lambda}x}+Be^{\sqrt{-\lambda}x}$$

由边界条件式(3.2.34)得 $X(x)\equiv0$，无非零解。

当 $\lambda=0$ 时，方程(3.2.33)的通解为

$$X(x)=Ax+B$$

由边界条件(3.2.34)得 $A=0$，故 $X(x)=B$(可取非零的任何实数)。所以 $\lambda_{0}=0$ 是固有值，相应的固有函数 $X_{0}(x)=B$，取 $B=1$，

即

$$X_0(x) = 1$$

当 $\lambda > 0$ 时，方程(3.2.33)的通解是

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$$

由边界条件 $X'(0)=0$ 得 $B=0$；由边界条件 $X'(l)=0$ 得

$$A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l = 0$$

因为 $A\neq 0$，$\sqrt{\lambda}\neq 0$，故有

$$\sin\sqrt{\lambda}l = 0$$

于是

$$\sqrt{\lambda}l = k\pi,\ \lambda = \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \quad (k = 1,2,3,\cdots)$$

相应的固有函数(不计常数因子)是

$$X_k(x) = \cos\frac{k\pi}{l}x \quad (k = 1,2,3,\cdots)$$

往解常微分方程(3.2.35)。

当 $\lambda_0=0$ 时，通解 $T_0(t)=C_0+D_0t$

当 $\lambda_k=(\frac{k\pi}{l})^2$ 时，通解为

$$T_k(t) = C_k\cos\frac{ak\pi}{l}t + D_k\sin\frac{ak\pi}{l}t \quad (k = 1,2,3,\cdots)$$

于是方程(3.2.30)满足条件式(3.2.32)的一组非解

$$u_0(x,t) = X_0(x)\cdot T_0(t) = C_0 + D_0t \qquad (3.2.36)$$

$$u_k(x,t) = X_k(x)\cdot T_k(t) = \left(C_k\cos\frac{ak\pi}{l}t + D_k\sin\frac{ak\pi}{l}t\right)\cos\frac{k\pi}{l}x \quad (k = 1,2,3,\cdots) \qquad (3.2.37)$$

其中 $C_0,D_0,C_k,D_k(k=1,2,3,\cdots)$ 是任意常数。

由迭加原理，方程(3.2.30)满足条件(3.2.32)的解可以写成级数形式

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x,t)$$

$$= C_0 + D_0 t + \sum_{k=1}^{\infty}\left(C_k \cos\frac{k\pi a}{l}t + D_k \sin\frac{k\pi a}{l}t\right)\cos\frac{k\pi}{l}x$$

(3.2.38)

由初始条件有

$$\varphi(x) = u(x,0) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos\frac{k\pi}{l}x \qquad (3.2.39)$$

$$\psi(x) = u_t(x,0) = D_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{ak\pi}{l}D_k \cos\frac{k\pi}{l}x \quad (3.2.40)$$

根据函数系$\{1,\cos\frac{k\pi}{l}x\}$在区间$[0,l]$上的正交性，得

$$C_0 = \frac{\int_0^l \varphi(x)\mathrm{d}x}{\int_0^l 1^2 \mathrm{d}x} = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$C_k = \frac{\int_0^l \varphi(x)\cos\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}x}{\int_0^l \cos^2\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}x} = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cos\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}x \quad (k = 1,2,3,\cdots)$$

(3.2.41)

同理有

$$D_0 = \frac{1}{l}\int_0^l \psi(x)\mathrm{d}x$$

$$D_k = \frac{2}{ak\pi}\int_0^l \psi(x)\cos\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}x \quad (k = 1,2,3,\cdots) \quad (3.2.42)$$

§3.3 非齐次泛定方程的混合问题

我们已经注意到，用分离变量法求解定解问题的关键步骤是确定固有函数与运用迭加原理，这些运算之所以能进行，就是因为泛定方程与边界条件都是齐次的。现在讨论非齐次方程混合问题

的解法。

考虑两端固定的弦的强迫振动的定解问题

$$(A)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f(x,t) \quad 0 < x < l \quad t > 0 & (3.3.1) \\ v|_{x=0} = v|_{x=l} = 0 \quad t > 0 & (3.3.2) \\ v|_{t=0} = \varphi(x),\ \dfrac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \quad 0 < x < l & (3.3.3) \end{cases}$$

由弦振动的物理意义知，此时的振动可看作是自由振动与纯强迫振动的合成。由此启发可将解设为

$$v(x,t) = w(x,t) + u(x,t) \qquad (3.3.4)$$

其中 $w(x,t)$ 表示仅由初始状态引起弦振动的位移它满足定解问题

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad 0 < x < l \quad t > 0 & (3.3.5) \\ w|_{x=0} = w|_{x=l} = 0 \quad t > 0 & (3.3.6) \\ w|_{t=0} = \varphi(x),\ \dfrac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \quad 0 < x < l & (3.3.7) \end{cases}$$

而 $u(x,t)$ 表示仅由强迫力引起弦振动的位移，它满足定解问题

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \quad 0 < x < l \quad t > 0 & (3.3.8) \\ u|_{t=0} = u|_{x=l} = 0 \quad t > 0 & (3.3.9) \\ u|_{t=0} = \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 & (3.3.10) \end{cases}$$

不难验证，若 $w(x,t)$ 是（Ⅰ）的解，$u(x,t)$ 是（Ⅱ）的解，则 $v(x,t) = w(x,t) + u(x,t)$ 是 (A) 的解。

自由振动问题（Ⅰ）可直接用分离变量法求解。因此，仅需讨论定解问题（Ⅱ）的解法。本节介绍这类定解问题的两种解法。

1. 齐次化原理与§2.3节中非齐次波动方程初值问题的情形完全类似，此时也成立如下的**齐次化原理**。若 $R(x,t;\tau)$ 是混合问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 R}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 R}{\partial x^2} = 0 \quad (t > \tau) \\
R|_{t=\tau} = 0,\ \dfrac{\partial R}{\partial t}|_{t=\tau} = f(x,\tau) \\
R|_{x=0} = R|_{x=l} = 0
\end{cases} \tag{3.3.11}
$$

的解(其中 $\tau \geqslant 0$ 是参数),则

$$
u(x,t) = \int_0^t R(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.3.12}
$$

就是混合问题(Ⅱ)的解。

为解式(3.3.11)。令 $t' = t - \tau$,混合问题式(3.3.11)化为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 R}{\partial t'^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 R}{\partial x^2} = 0 \quad (t' > 0) \\
R|_{t'=0} = 0,\ \dfrac{\partial R}{\partial t'}|_{t'=0} = f(x,\tau) \\
R|_{x=0} = R|_{x=l} = 0
\end{cases} \tag{3.3.13}
$$

此即混合问题(Ⅰ),可直接利用§3.1的结果,由式(3.1.14)得

$$
\begin{aligned}
R(x,t;\tau) &= \sum_{k=1}^{\infty} B_k(\tau) \sin \frac{k\pi a}{l} t' \sin \frac{k\pi}{l} x \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} B_k(\tau) \sin \frac{k\pi a}{l}(t-\tau) \sin \frac{k\pi x}{l}
\end{aligned} \tag{3.3.14}
$$

其中

$$
B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l f(x,\tau) \sin \frac{k\pi}{l} x \mathrm{d}x \tag{3.3.15}
$$

根据齐次化原理,将(3.3.14)代入式(3.3.12)即得混合问题(Ⅱ)的解。

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \int_0^t R(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_0^t B_k(\tau) \sin \frac{k\pi a}{l}(t-\tau) \mathrm{d}\tau \right] \sin \frac{k\pi}{l} x
\end{aligned} \tag{3.3.16}
$$

例6 求混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\operatorname{sh}x \quad 0<x<l \quad t>0\\ u|_{t=0}=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=0\\ u|_{x=0}=u|_{x=l}=0\end{cases}$$

的解。

解:根据齐次化原理,先求解

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 R}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 R}{\partial x^2}=0 \quad 0<x<l \quad t>\tau\\ R|_{t=\tau}=0,\ \dfrac{\partial R}{\partial t}|_{t=\tau}=\operatorname{sh}x\\ R|_{x=0}=R|_{x=l}=0\end{cases}$$

$$R(x,t;\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k\cos\frac{k\pi a}{l}(t-\tau)+B_k\sin\frac{k\pi a}{l}(t-\tau)\right]\sin\frac{k\pi}{l}x$$

此处 $A_k=0$,$B_k=\dfrac{2}{k\pi a}\displaystyle\int_0^l \operatorname{sh}x\sin\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}x$

$$=\frac{2}{k\pi a}\int_0^l\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\sin\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{(-1)^{k+1}2l\operatorname{sh}l}{a(k^2\pi^2+l^2)}$$

故原问题的解为

$$u(x,t)=\int_0^t R(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_0^t\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}2l\operatorname{sh}l}{a(k^2\pi^2+l^2)}\sin\frac{k\pi a}{l}(t-\tau)\sin\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}\tau$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t\frac{(-1)^{k+1}2l\operatorname{sh}l}{a(k^2\pi^2+l^2)}\sin\frac{k\pi a}{l}(t-\tau)\sin\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{2l^2}{a^2\pi}\operatorname{sh}l\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(k^2\pi^2+l^2)}\left(1-\cos\frac{k\pi a}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x$$

2. 固有函数法(试探法)

由于与问题(Ⅰ)对应的齐次泛定方程定解问题的固有函数是

$$\sin\frac{k\pi}{l}x \quad (k=1,2,3,\cdots)$$

它显然满足(Ⅰ)的第一类齐次边界条件(3.3.9),因此可试探设(Ⅰ)的解具有形式

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\sin\frac{k\pi}{l}x \qquad (3.3.17)$$

其中 $T_k(t)$ 是待定函数,为了确定 $T_k(t)$,将自由项 $f(x,t)$ 也按固有函数系展成 x 的富里埃正弦级数,即

$$f(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(t)\sin\frac{k\pi}{l}x \qquad (3.3.18)$$

其中系数

$$f_k(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}x$$

将式(3.3.17)及式(3.3.18)代入(3.3.8)及初始条件式(3.3.10)得

$$\begin{cases}\sum_{k=1}^{\infty}\left[T_k''(t)+\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2T_k(t)-f_k(t)\right]\sin\frac{k\pi x}{l}=0\\ \sum_{k=1}^{\infty}T_k(0)\sin\frac{k\pi}{l}x\equiv 0,\ \sum_{k=1}^{\infty}T_k'(0)\sin\frac{k\pi}{l}x\equiv 0\end{cases}$$

于是确定函数 $T_k(t)$ 归结为解下列常系数线性非齐次常微分方程的零初值问题

$$\begin{cases}T_k''(t)+\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2T_k(t)=f_k(t)\\ T_k(0)=T_k'(0)=0 \quad (k=1,2,3,\cdots)\end{cases} \qquad (3.3.19)$$

由常数变异法可以求出式(3.3.19)的解为

$$T_k(t)=\frac{l}{k\pi a}\int_0^t f_k(\tau)\sin\frac{k\pi a(t-\tau)}{l}\mathrm{d}\tau \qquad (3.3.20)$$

所以

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\sin\frac{k\pi}{l}x$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{l}{k\pi a} \int_0^t f_k(\tau) \sin \frac{k\pi a(t-\tau)}{l} d\tau \right] \sin \frac{k\pi}{l} x \quad (3.3.21)$$

是定解问题(Ⅰ)的解。

这里所给的求解问题(Ⅰ)的方法,其实质是将方程的自由项及解都按齐次方程所对应的固有函数系展开。所以这种方法叫**固有函数法**(**试探法、待定系数法**)。应用这种方法要预先知道相应的固有函数系。

例 7 求解下列定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin \frac{2\pi}{l} x \sin \frac{2a\pi}{l} t & 0 < x < l \quad t > 0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = 0, \ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

解:因相应的齐次方程的定解问题的固有函数系是 $\{\sin \frac{k\pi}{l} x\}$,所以可设解为

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{k\pi}{l} x \quad (3.3.22)$$

将 $f(x,t) = \sin \frac{2\pi}{l} x \sin \frac{2a\pi}{l} t$ 按固有函数系展成级数

$$\sin \frac{2\pi}{l} x \sin \frac{2a\pi}{l} t = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi}{l} x$$

比较上式两端的系数即得

$$f_k(t) = \begin{cases} \sin \frac{2\pi a}{l} t & \text{当 } k = 2 \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } k \geqslant 1 \text{ 且 } k \neq 2 \text{ 时} \end{cases}$$

由式(3.3.13)得

$$T_2(t) = \frac{l}{2\pi a} \int_0^t \sin \frac{2a\pi}{l} \tau \sin \frac{2\pi a(t-\tau)}{l} d\tau$$

$$= \frac{l}{4a\pi} \left(\frac{l}{2a\pi} \sin \frac{2a\pi}{l} t - t \cos \frac{2a\pi}{l} t \right)$$

$$T_k(t)=0\quad(k=1,3,4,\cdots)$$

于是

$$u(x,t)=\frac{l}{4a\pi}\left(\frac{l}{2a\pi}\sin\frac{2a\pi}{l}t-t\cos\frac{2a\pi}{l}t\right)\cdot\sin\frac{2\pi}{l}x$$

例 8 求解下列定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=A\sin\omega t\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}=0\\ u|_{t=0}=0\end{cases}$$

解:因为$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$在$\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0}=\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l}=0$下的固有函数系是$\{\cos\frac{k\pi}{l}x\}$,所以可将问题的解表成

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\cos\frac{k\pi}{l}x$$

将上式代入泛定方程得

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[T_k'(t)+\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2T_k\right]\cos\frac{k\pi}{l}x=A\sin\omega t$$

比较上式两端的系数得

$$T_0'=A\sin\omega t,\ T_k'+\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2T_k=0\quad(k\neq0)$$

再将 $u(x,t)$的余弦级数代入初始条件有

$$T_k(0)=0$$

$T_k(t)$的常微分方程在初始条件 $T_k(0)=0$ 下的解是

$$T_0(t)=\frac{A}{\omega}(1-\cos\omega t),\ T_k(t)=0\quad(k\neq0)$$

于是所求的解是

$$u(x,t)=\frac{A}{\omega}(1-\cos\omega t)$$

§3.4 非齐次边界条件的处理

在这一节中，我们讨论带有非齐次边界条件的定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \quad 0 < x < l \quad t > 0 & (3.4.1) \\ u|_{x=0} = \mu_1(t),\ u|_{x=l} = \mu_2(t) \quad t > 0 & (3.4.2) \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) & (3.4.3) \end{cases}$$

为了能用分离变量法求解，需将边界条件化成齐次的。为此，任选一满足边界条件式(3.4.2)的函数 $w(x,t)$，即

$$w(x,t)|_{x=0} = \mu_1(t),\ w(x,t)|_{x=l} = \mu_2(t) \tag{3.4.4}$$

满足式(3.4.4)的函数有很多且容易找到。例如可取 w 为 x 的线性函数

$$w(x,t) = A(t)x + B(t) \tag{3.4.5}$$

由式(3.4.4)确定

$$A(t) = \frac{1}{l}[\mu_2(t) - \mu_1(t)],\ B(t) = \mu_1(t) \tag{3.4.6}$$

将式(3.4.6)代入式(3.4.5)即得

$$w(x,t) = \frac{\mu_2(t) - \mu_1(t)}{l}x + \mu_1(t) \tag{3.4.7}$$

再令

$$\begin{aligned} u(x,t) &= v(x,t) + w(x,t) \\ &= v(x,t) + \mu_1(t) + \frac{\mu_2(t) - \mu_1(t)}{l}x \end{aligned} \tag{3.4.8}$$

则待定函数 $v(x,t)$ 满足齐次边界条件

$$\begin{cases} v(0,t) = u(0,t) - w(0,t) = 0 \\ v(l,t) = u(l,t) - w(l,t) = 0 \end{cases}$$

由此得到关于 $v(x,t)$ 的定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=f_1(x,t) \quad 0<x<l \quad t>0 \\ v|_{x=0}=v|_{x=l}=0 \\ v|_{t=0}=\varphi_1(x),\ \dfrac{\partial v}{\partial t}|_{t=0}=\psi_1(x)\end{cases} \tag{3.4.9}$$

其中

$$\begin{cases}f_1(x,t)=f(x,t)-[\mu_1''(t)+\dfrac{\mu_2''(t)-\mu_1''(t)}{l}x] \\ \varphi_1(x)=\varphi(x)-[\mu_1(0)+\dfrac{\mu_2(0)-\mu_1(0)}{l}x] \\ \psi_1(x)=\psi(x)-[\mu_1'(0)+\dfrac{\mu_2'(0)-\mu_1'(0)}{l}x]\end{cases} \tag{3.4.10}$$

问题式(3.4.9)可用§3.3节的方法解出。将式(3.4.9)的解代入式(3.4.8)即得原问题的解。

从式(3.4.10)看出，当原问题的泛定方程为齐次方程，采用代换式(3.4.8)将边界条件化为齐次的之后，泛定方程将变为非齐次的。

例9 求解下列定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \quad 0<x<l \quad t>0 \\ w|_{t=0}=\dfrac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=0 \quad 0<x<l \\ w|_{x=0}=0,\ u|_{x=l}=A\sin\omega t \quad t>0\end{cases} \tag{3.4.11}$$

解：令 $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$，且 (3.4.12)

$$w|_{x=0}=0,\ w|_{x=l}=A\sin\omega t \tag{3.4.13}$$

设 $w(x,t)=A(t)x+B(t)$。由式(3.4.12)得

$$w(x,t)=\frac{A}{l}x\sin\omega t$$

在代换式(3.4.12)下得 $v(x,t)$ 的定解问题为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=A\omega^2\dfrac{x}{l}\sin\omega t\\ v|_{x=0}=0,\ v|_{x=l}=0\\ v|_{t=0}=0,\ \dfrac{\partial v}{\partial t}|_{t=0}=-\dfrac{A\omega x}{l}\end{cases}\tag{3.4.14}$$

再利用§3.3节的方法求出式(3.4.14)的解，代入式(3.4.12)即得式(3.4.11)的解。

由于 $w(x,t)$ 的选择具有很大的灵活性，我们可以对 $w(x,t)$ 再附加一些条件，使得 $v(x,t)$ 所满足的方程成为齐次的。这种解法称之为分解未知函数法。仍以例9来说明这种方法的具体步骤

第一步：分解问题

设 $u=v+w$。w 和 v 分别是下列两个问题的解

$$(A)\ \begin{cases}\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0\\ w|_{x=0}=0\\ w|_{x=l}=A\sin\omega t\end{cases}\qquad (B)\ \begin{cases}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0\\ v|_{x=0}=v|_{x=l}=0\\ v|_{t=0}=-w|_{t=0}\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}|_{t=0}=-\dfrac{\partial w}{\partial t}|_{t=0}\end{cases}$$

第二步：求(A)的一个特解

设 $w(x,t)=X(x)T(t)$，将它代入第二个边界条件得 $X(l)T(t)=A\sin\omega t$，取 $T(t)=A\sin\omega t$，得 $X(l)=1$，再把 $w(x,t)=X(x)A\sin\omega t$ 代入第一个边界条件和泛定方程，分别得

$$X(0)=0,\ X''(x)+\frac{\omega^2}{a^2}X(x)=0$$

解常微分方程的边值问题

$$\begin{cases}X''(x)+\dfrac{\omega^2}{a^2}X(x)=0\\ X(0)=0,\ X(l)=1\end{cases}$$

得

$$X(x)=\frac{\sin\frac{\omega}{a}x}{\sin\frac{\omega l}{a}}$$

所以

$$w(x,t)=\frac{A\sin\frac{\omega}{a}x\sin\omega t}{\sin\frac{\omega l}{a}}$$

从而问题(B)化为

$$(B')\quad\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0\\ v|_{x=0}=v|_{x=l}=0\\ v|_{t=0}=0\ \dfrac{\partial v}{\partial t}|_{t=0}=-\dfrac{A\omega}{\sin\frac{\omega l}{a}}\sin\dfrac{\omega}{a}x\end{cases}$$

第三步　求解(B')

应用分离变量法可得

$$v(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi a}{l}t+b_k\sin\frac{k\pi a}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x$$

由 $v|_{t=0}=0$ 得 $a_k=0$，由

$$\frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0}=\sum_{k=0}^{\infty}b_k\frac{k\pi a}{l}\sin\frac{k\pi}{l}x=-\frac{\partial w}{\partial t}|_{t=0}=-\frac{A\omega\sin\frac{\omega}{a}x}{\sin\frac{\omega}{a}l}$$

故

$$b_k=\frac{2}{k\pi a}\int_0^l-A\omega\frac{\sin\frac{\omega}{a}x}{\sin\frac{\omega}{a}l}\sin\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{-2A\omega}{k\pi a\sin\frac{\omega}{a}l}\left[-\frac{\sin\left(\frac{\omega}{a}+\frac{k\pi}{l}\right)x}{2\left(\frac{\omega}{a}+\frac{k\pi}{l}\right)}+\frac{\sin\left(\frac{\omega}{a}-\frac{k\pi}{l}\right)x}{2\left(\frac{\omega}{a}-\frac{k\pi}{l}\right)}\right]_0^l$$

$$=\frac{A\omega}{k\pi a\sin\frac{\omega}{a}l}\left[\frac{\sin\left(\frac{\omega}{a}l+k\pi\right)}{\frac{\omega}{a}+\frac{k\pi}{l}}-\frac{\sin\left(\frac{\omega}{a}l-k\pi\right)}{\frac{\omega}{a}-\frac{k\pi}{l}}\right]$$

$$=(-1)^k\frac{2A\omega}{al}\frac{1}{\left(\frac{\omega}{a}\right)^2-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2}$$

$$=(-1)^k\frac{2aA\omega}{l\left[\omega^2-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2\right]}$$

所以

$$u(x,t)=\frac{A\sin\frac{\omega}{a}x}{\sin\frac{\omega}{a}l}\sin\omega t$$

$$+\frac{2aA\omega}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\omega^2-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2}\sin\frac{k\pi at}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}$$

例 10 求解下列定解问题

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=A & 0<x<l \quad t>0\\ u|_{x=0}=0,\ u|_{x=l}=B\\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=u|_{t=0}=0\end{cases}$$

解:因为方程的自由项与边界条件都与 t 无关,故可令

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x)$$

代入泛定方程。分解问题

$$(A)\quad\begin{cases}a^2w''(x)+A=0\\ w|_{x=0}=0,\ w|_{x=l}=B\end{cases}$$

$$(B)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \\ v|_{x=0} = v|_{x=l} = 0 \\ v|_{t=0} = -w(x),\ \dfrac{\partial v}{\partial t}|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

解常微分方程边值问题(A)得

$$w(x) = -\frac{A}{2a^2}x^2 + Cx + D$$

由边值条件有

$$D = 0, C = \frac{1}{l}\left[\frac{A}{2a^2}l^2 + B\right] = \frac{Al}{2a^2} + \frac{B}{l}$$

所以

$$w(x) = -\frac{A}{2a^2}x^2 + \left(\frac{Al}{2a^2} + \frac{B}{l}\right)x$$

往求(B)的解。由分离变量法有

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}(C_k\cos\frac{k\pi a}{l}t + D_k\sin\frac{k\pi a}{l}t)\sin\frac{k\pi}{l}x$$

由$\dfrac{\partial v}{\partial t}|_{t=0}=0$ 得 $D_k=0$,故

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}C_k\cos\frac{k\pi a}{l}t\sin\frac{k\pi}{l}x$$

由 $v|_{t=0}=-w(x)$得

$$\frac{A}{2a^2}x^2 - \left(\frac{Al}{2a^2} + \frac{B}{l}\right)x = \sum_{k=1}^{\infty}C_k\sin\frac{k\pi}{l}x$$

所以

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{2}{l}\int_0^l\left[\frac{A}{2a^2}x^2 - (\frac{Al}{2a^2} + \frac{B}{l})x\right]\sin\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}x \\ &= \frac{-2Al^2}{a^2k^3\pi^3} + \frac{2}{k\pi}\left[\frac{Al^2}{a^2k^2\pi^2} + B\right]\cos k\pi \end{aligned}$$

故

$$u(x,t) = -\frac{A}{2a^2}x^2 + (\frac{Al}{2a^2} + \frac{B}{l})x + \sum_{k=1}^{\infty}C_k\cos\frac{k\pi a}{l}t\sin\frac{k\pi}{l}x$$

例 11 求解下列定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x)\\ u|_{x=0}=M_1,\ w|_{x=l}=M_2\\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=\psi(x)\end{cases}$$

解:由于自由项与边界条件都与 t 无关,令

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x)$$

分解成 $w(x)$、$v(x,t)$满足

$$(A)\quad\begin{cases}a^2w''(x)+f(x)=0\\ w|_{x=0}=M_1\quad w|_{x=l}=M_2\end{cases}$$

$$(B)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0\\ v|_{x=0}=v|_{x=l}=0\\ v|_{t=0}=\varphi(x)-w(t)\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}|_{t=0}=\psi(x)\end{cases}$$

解(A),设

$$\int_0^x\int_0^x-\frac{f(\xi)}{a^2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x=F(x)$$

由泛定方程得

$$w(x)=F(x)+C_1x+C_2$$

由边界条件确定

$$C_2=M_1-F(0)$$

$$C_1=\frac{M_2-M_1}{l}+\frac{F(0)-F(l)}{l}$$

所以

$$w(x)=F(x)+\left(\frac{M_2-M_1}{l}+\frac{F(0)-F(l)}{l}\right)x+M_1-F(0)$$

往解(B),由分离变量法得

$$v(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(C_k\cos\frac{k\pi a}{l}t+D_k\sin\frac{k\pi a}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x$$

其中

$$C_k=\frac{2}{l}\int_0^l[\varphi(x)-w(x)]\sin\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}x\qquad(k=1,2,3,\cdots)$$

$$D_k=\frac{2}{k\pi a}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}x\qquad(k=1,2,3,\cdots)$$

故

$$u(x,t)=F(x)+\left[\frac{M_2-M_1}{l}+\frac{F(0)-F(l)}{l}\right]x$$

$$+M_1-F(0)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(C_k\cos\frac{k\pi a}{l}t+D_k\sin\frac{k\pi a}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x$$

对于一个定解问题，有多种解法，重要的是要掌握其思想方法，灵活应用。

例 12 求解定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-a^2\dfrac{\partial u}{\partial t}+A\mathrm{e}^{-\alpha x}=0\\ u|_{x=0}=u|_{x=l}=0\\ u|_{t=0}=T(\text{常数})\end{cases}$$

解法一 设 $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$，$v(x,t)$与 $w(x,t)$分别满足

$$(A)\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial t}=\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\ w|_{x=0}=w|_{x=l}=0\\ w|_{t=0}=T\end{cases}\qquad(B)\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t}=\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{A}{a^2}\mathrm{e}^{-\alpha x}\\ v|_{x=0}=v|_{x=l}=0\\ v|_{t=0}=0\end{cases}$$

解(A)，由分离变量法得

$$w(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k\mathrm{e}^{-\left(\frac{k\pi}{al}\right)^2t}\sin\frac{k\pi}{l}x$$

其中

$$C_k=\frac{2}{l}\int_0^l T\sin\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}x=\frac{2T}{k\pi}[1-(-1)^k]$$

解(B)。由固有函数法，设

$$v(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}v_k(t)\sin\frac{k\pi}{l}x$$

将它代入泛定方程得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[v_k'(t)+\frac{1}{a^2}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2v_k(t)\right]\sin\frac{k\pi}{l}x=\frac{A}{a^2}e^{-\alpha x}$$

将$\frac{A}{a^2}e^{-\alpha x}$按固有函数系$\{\sin\frac{k\pi}{l}x\}$展开，即

$$\frac{A}{a^2}e^{-\alpha x}=\sum_{k=1}^{\infty}f_k\sin\frac{k\pi}{l}x$$

其中

$$\begin{aligned}f_k&=\frac{2}{l}\int_0^l\frac{A}{a^2}e^{-\alpha x}\sin\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}x\\&=\frac{2A}{a^2}\frac{k\pi}{\alpha^2l^2+(k\pi)^2}\left[1-(-1)^ke^{-\alpha l}\right]\end{aligned}$$

解常微分方程初值问题

$$\begin{cases}u_k'(t)+\left(\frac{k\pi}{al}\right)^2u_k(t)=f_k\\u_k|_{t=0}=0\end{cases}$$

得

$$u_k(t)=\left(\frac{al}{k\pi}\right)^2f_k\left[1-e^{-\left(\frac{k\pi}{al}\right)^2t}\right]$$

由此求得

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)\sin\frac{k\pi}{l}x+\sum_{k=1}^{\infty}C_ke^{-\left(\frac{k\pi}{al}\right)^2t}\sin\frac{k\pi}{l}x$$

解法二 设$u(x,t)=w(x)+v(x,t)$，$w(x)$与$v(x,t)$分别满足

$$(A)\ \begin{cases}w''(x)+Ae^{-\alpha x}=0\\w|_{x=0}=w|_{x=l}=0\end{cases}\qquad(B)\ \begin{cases}\frac{\partial^2v}{\partial x^2}-a^2\frac{\partial v}{\partial t}=0\\v|_{x=0}=v|_{x=l}=0\\v|_{t=0}=T-w(x)\end{cases}$$

解(A)得

$$w(x) = -\frac{A}{\alpha^2}e^{-\alpha x} + \frac{A}{l\alpha^2}(-1 + e^{-\alpha x})x + \frac{A}{\alpha^2}$$

用分离变量法解(B)。设

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-(\frac{k\pi}{al})^2 t} \sin\frac{k\pi}{l}x$$

其中

$$C_k = \frac{2}{l}\int_0^l [T - w(x)]\sin\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2T}{k\pi}[1 - (-1)^k] + \frac{2A}{\alpha^2}\frac{k\pi}{(\alpha l)^2 + (k\pi)^2}[1 - (-1)^k e^{-\alpha l}]$$

$$+ \frac{2A}{k\pi\alpha^2}[(-1)^k e^{-\alpha l} - 1]。$$

解法三 设 $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\sin\frac{k\pi}{l}x$

代入泛定方程及边界条件得

$$\begin{cases} T_k'(t) + \left(\frac{k\pi}{al}\right)^2 T_k(t) = f_k(t) \\ T_k(0) = \frac{1}{k\pi}[1 - (-1)^k] \end{cases}$$

解上述常微分方程初值问题得

$$T_k(t) = \left\{\frac{2T}{k\pi}[1 - (-1)^k] - (\frac{al}{k\pi})^2 f_k\right\} e^{-(\frac{k\pi}{al})^2 t} + (\frac{al}{k\pi})^2 f_k$$

代入

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\sin\frac{k\pi}{l}x$$

即为所求。

习 题 三

1. 求解下列定解问题

(1) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u|_{t=0} = \sin \dfrac{3\pi x}{l},\ \dfrac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = x(l-x) \quad 0 < x < l \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u|_{t=0} = \begin{cases} x & 0 < x \leqslant \dfrac{1}{2} \\ 1-x & \dfrac{1}{2} < x < 1 \end{cases},\ \dfrac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = x(x-1) \\ u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (t > 0, 0 < x < \pi) \\ u|_{x=0} = \dfrac{\partial u}{\partial x}|_{x=\pi} = 0 \quad (t > 0) \\ u|_{t=0} = f(x) \end{cases}$

(4) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (t > 0, 0 < x < 1) \\ u|_{t=0} = \begin{cases} x & 0 < x \leqslant \dfrac{1}{2} \\ 1-x & \dfrac{1}{2} < x < 1 \end{cases} \\ u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u|_{x=0} = w|_{x=a} = 0 \\ u|_{y=0} = \sin \dfrac{\pi x}{a},\ u|_{y=b} = 0 \end{cases}$

2. 求解下列定解问题

(1) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x \quad 0 < x < 1 \quad t > 0 \\ u|_{t=0} = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0 \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = b\text{sh}x \quad 0 < x < l \quad t > 0 \\ u|_{t=0} = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0 \quad 0 \leqslant x \leqslant l \\ u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=l} = 0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = A\sin\omega t \\ u|_{t=0} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}|_{x=l} = 0 \end{cases}$

3. 长为 l 的均匀细杆的初始温度为零度，端点 $x=0$ 保持常温 u_0，而在 $x=l$端和侧面上，热量可以散发到周围介质中去。介质的温度为零度，此时杆上的温度分布函数满足下述定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -b^2 u \\ u|_{t=0} = 0 \\ u|_{x=0} = u_0,\ [\dfrac{\partial u}{\partial x} + hu]_{x=l} = 0 \end{cases}$$

试求其解。

4. 求下列定解问题

(1) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\beta(u - u_0) \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = u_0 \\ u|_{t=0} = f(x) \end{cases}$

其中 a,β,u_0 均为常数，$f(x)\in c^1$

[提示：作变量代换 $u=u_0+v(x,t)e^{-\beta t}$]

(2) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = b\text{sh}x \quad 0 < x < 1 \quad t > 0 \\ u|_{t=0} = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0 \\ u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=l} = 1 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u|_{x=0} = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial x}|_{x=l} = k \\ u|_{t=0} = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0 \end{cases}$

5. 求解下列定解问题

(1) $\begin{cases} \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \dfrac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \dfrac{1}{\rho^2} \dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \\ u|_{\theta=0} = u|_{\theta=\alpha} = 0 \\ u|_{\rho=a} = f(\theta) \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u|_{x=0} = 0, \ u|_{x=a} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial y}|_{y=b} = 0 \end{cases}$

6. 在膜型扁壳渠道闸门设计中，为了考察闸门在水压力作用下的受力情况，要在矩形区域 $0 \leqslant x \leqslant a$，$0 \leqslant y \leqslant b$ 上求解如下的非齐次调和方程的边值问题。

$$\begin{cases} \Delta u = py + q \quad (p < 0, q > 0 \text{ 为常数}) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = 0, \ u|_{x=a} = 0 \\ u|_{y=0} = u|_{y=b} = 0 \end{cases}$$

试解之。

7. 在以原点为圆心，a 为半径的圆内，求泊松方程 $\Delta u = -4$ 的解，使它满足边界条件 $u|_{\rho=a} = 0$。

第四章　固有值问题

§4.1　斯图姆-刘维尔问题

1. 斯图姆-刘维尔问题的来源

在第三章的讨论中我们已经看到，采用分离变量法求解定解问题时，总不可避免地要遇到一个常微分方程在某种齐次边界条件下的固有值问题。例如，在求解弦振动的混合问题时，我们得到过常微分方程

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

及关于函数 $X(x)$ 在边界上应满足的一些齐次边界条件

$$X(0) = X(l) = 0 \text{ 或 } X'(0) = X'(l) = 0$$

或其它类型的齐次边界条件，由方程和边界条件就构成了一个固有值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 & (4.1.1) \\ \text{第一（或第二，或第三）类齐次边界条件} & (4.1.2) \end{cases}$$

在求解有限长杆的热传导方程的混合问题时，我们遇到了固有值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 & (4.1.3) \\ X(0) = 0,\ X'(l) + hX(l) = 0 & (4.1.4) \end{cases}$$

在求解二维拉普拉斯方程的定解问题时，遇到固有值问题

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0 & (4.1.5) \\ \Theta(0) = \Theta(2\pi) & (4.1.6) \end{cases}$$

在本章中还要讲到用分离变量法求解偏微分方程时，会遇到贝塞

尔方程

$$\rho^2 p''(\rho) + \rho p'(\rho) + (\lambda\rho^2 - n^2)p(\rho) = 0 \qquad (4.1.7)$$

和连带的勒让德(Legendre)方程

$$(1 - x^2)\frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1 - x^2}\right]p = 0 \qquad (4.1.8)$$

这些方程初看起来似无什么联系。为了研究其共同的特点，若改变一下它们的形式，以 y 代替 X 或 p，则有

$$[y']' + \lambda y = 0$$

$$[xy']' - \frac{n^2}{x}y + \lambda xy = 0$$

$$[(1 - x^2)y']' - \frac{m^2}{1 - x^2}y + n(n+1)y = 0$$

就可以发现它们在形式上有许多相似之处。

一般地，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[k(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0 \quad a < x < b \qquad (4.1.9)$$

不难看出，方程(4.1.1)、式(4.1.7)、式(4.1.8)都是上述方程的特例。例如取 $k(x)=1$，$q(x)=0$，$\rho(x)=1$ 即为方程(4.1.1)。形如式(4.1.9)的方程称为**斯图姆-刘维尔方程**。如果 $k(x)$ 和 $\rho(x)$ 在 $[a,b]$ 上都是正的，那么，斯图姆-刘维尔方程称为在区间 $[a,b]$ 上**是正则的**。

斯图姆-刘维尔方程带有经过分离变量后的端点条件的问题，称为斯图姆-刘维尔方程的固有值问题，即

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[k(x)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0 \quad a < x < b \\ \text{在 } x = a \text{ 及 } x = b \text{ 处提第一(第二、第三类)齐次边界条件} \\ \text{或自然边界条件} \end{cases}$$

使得斯图姆-刘维尔问题有非零解的 λ 值，称为这个问题的**固有**

值。对应于固有值的非零解，称为**固有函数**。

为了保证解的存在，我们假定 $k(x)$ 及其一阶导数在 $[a,b]$ 上连续。当 $a<x<b$ 时，$k(x)>0$；$q(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。或在 (a,b) 内连续而在端点处有一阶极点，且 $q(x)\geqslant 0$；$\rho(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $\rho(x)\geqslant\rho_0>0$，ρ_0 是一正常数。

例 1　求下列斯图姆-刘维尔问题的固有值和固有函数

$$\begin{cases} y''+\lambda y=0 \quad 0<x<\pi \\ y(0)=0,\ y'(\pi)=0 \end{cases}$$

解：1）当 $\lambda=0$ 时，通解 $y=Ax+B$，由 $y(0)=0$ 得 $B=0$；由 $y'(\pi)=0$ 得 $A=0$。故 $\lambda=0$ 不是固有值。

2）$\lambda<0$，通解为 $y=Ae^{\sqrt{-\lambda}x}+Be^{-\sqrt{-\lambda}x}$

由端点条件得

$$\begin{cases} A+B=0 \\ \sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}\pi}A-\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}\pi}B=0 \end{cases}$$

由此解得 $A=B=0$，因此仅存在唯一零解。

3）$\lambda>0$ 时，斯图姆-刘维尔方程的通解是

$$y=A\cos\sqrt{\lambda}x+B\sin\sqrt{\lambda}x$$

由 $y(0)=0$ 得 $A=0$，利用条件 $y'(\pi)=0$ 可得

$$B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x=0$$

因为 $\lambda=0$ 不是固有值，为使斯图姆-刘维尔问题有非零解，必须

$$\cos\sqrt{\lambda}\pi=0,\ B\neq 0$$

因此固有值是

$$\lambda_k=\frac{(2k-1)^2}{2^2} \quad (k=1,2,3,\cdots)$$

相对应的固有函数是

$$\sin\frac{2k-1}{2}x \quad (k=1,2,3,\cdots)$$

例 2　给定柯西方程

$$x^2y''+xy'+\lambda y=0 \quad 1<x<e$$

和端点条件 $y(1)=0$，$y(\mathrm{e})=0$。求这个斯图姆-刘维尔问题的固有值和固有函数。

解：由变换

$$k(x)=\mathrm{e}^{\int\frac{c_2(x)}{c_1(x)}\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{\int\frac{x}{x^2}\mathrm{d}x}=x$$

$$q(x)=\frac{c_3(x)}{c_1(x)}k(x)=\frac{0}{x^2}\cdot x=0$$

$$\rho(x)=\frac{1}{c_1(x)}k(x)=\frac{1}{x^2}\cdot x=\frac{1}{x}$$

其中 $c_1(x)$，$c_2(x)$，$c_3(x)$是方程

$$c_1(x)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+c_2(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+[c_3(x)+\lambda]y=0$$

的系数。柯西方程可改写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+\frac{1}{x}\lambda y=0$$

对柯西方程寻求形式解 $y=x^m$，得到确定 m 的方程

$$m^2+\lambda=0,\ m=\pm i\sqrt{\lambda}$$

因而柯西方程的通解是

$$y(x)=C_1x^{i\sqrt{\lambda}}+C_2x^{-i\sqrt{\lambda}}$$

注意到

$$x^{i\alpha}=\mathrm{e}^{i\alpha\ln x}=\cos(\alpha\ln x)+i\sin(\alpha\ln x)$$

于是

$$y(x)=A\cos(\sqrt{\lambda}\ln x)+B\sin(\sqrt{\lambda}\ln x)$$

其中 A 和 B 都是与 C_1 和 C_2 有关的任意常数，由端点条件

$$y(1)=0\text{ 得 }A=0$$

由 $y(\mathrm{e})=0$ 得 $B\sin\sqrt{\lambda}=0$，因此得固有值

$$\lambda_k=k^2\pi^2\quad(k=1,2,3,\cdots)$$

及相应的固有函数

$$\sin(k\pi\ln x)\quad(k=1,2,3,\cdots)$$

当 $k(a)=k(b)$时，出现另一种类型的斯图姆-刘维尔问题。所

谓周期斯图姆-刘维尔问题。

例 3 求解周期斯图姆-刘维尔问题。

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \quad -\pi < x < \pi \\ y(-\pi) = y(\pi) \\ y'(-\pi) = y'(\pi) \end{cases}$$

解:注意到 $k(x)=1$,于是 $k(-\pi)=k(\pi)$,当 $\lambda>0$ 时,这个斯图姆-刘维尔方程的通解是

$$y(x) = A\cos\sqrt{\lambda}\,x + B\sin\sqrt{\lambda}\,x$$

将它代入周期端点条件,得如下两个方程

$$\begin{cases} (A\cos\sqrt{\lambda}\,\pi - B\sin\sqrt{\lambda}\,\pi) - \\ (A\cos\sqrt{\lambda}\,\pi + B\sin\sqrt{\lambda}\,\pi) = 0 \\ -A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,\pi + B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,\pi - \\ (A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,\pi + B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,\pi) = 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} (2\sin\sqrt{\lambda}\,\pi)B = 0 \\ (2\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,\pi)A = 0 \end{cases}$$

由于 $y(x)$是当 $\lambda>0$ 时的解,所以对任意的 A 和 B 都有

$$\sin\sqrt{\lambda}\,\pi = 0$$

故

$$\lambda_k = k^2 \quad (k = 1,2,3,\cdots)$$

这样,对应于同一固有值 k^2,可得到两个线性无关的固有函数 $\cos kx$ 和 $\sin kx$。

如果 $\lambda<0$,不难看出,方程的非零解不能满足周期端点条件。

当 $\lambda=0$ 时,对应的固有函数是 1。

于是,上述这个斯图姆-刘维尔问题的固有值是

$$(0,\{k^2\}) \quad (k = 1,2,3,\cdots)$$

与之相对应的固有函数是

$$1,\{\cos kx\} \text{ 和 } \{\sin kx\} \quad (k = 1,2,3,\cdots)$$

不难看出，任意的二阶常微分方程

$$f(x)y'' + g(x)y' + h(x)y = 0$$

是斯图姆-刘维尔方程的充要条件是 $f'(x)=g(x)$

即

$$[f(x)y']' + h(x)y = 0$$

如果条件 $f'(x)=g(x)$ 不满足，利用乘一积分因子 $T(x)$，使

$$T(x)[f(x)y'' + g(x)y'] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[T + f']$$

$T(x)$ 为待定函数。由上式得

$$fT' - (g - f')T = 0$$

积分得

$$T(x) = \mathrm{e}^{\int \frac{g - f'}{f} \mathrm{d}x}$$

这样，常微分方程就化为斯图姆-刘维尔方程

$$[Tfy']' + Thy = 0$$

2. 斯图姆-刘维尔问题的基本定理

关于斯图姆-刘维尔问题，有下面四个基本定理。这些定理是分离变量法的理论基础。

定理 1 存在着无穷多个实的固有值

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k \leqslant \lambda_{k+1} \leqslant \cdots \qquad (4.1.10)$$

及对应于它们的固有函数

$$y_1(x),\ y_2(x), \cdots, y_k(x), y_{k+1}(x), \cdots$$

定理 2 当 $q(x) \geqslant 0$ 时，所有的固有值都不是负的，即

$$\lambda_k \geqslant 0,\ (k = 1,2,3,\cdots) \qquad (4.1.11)$$

若在闭区间 $[a,b]$ 上 $k(x) > 0$，则某个 $\lambda_k = 0$ 的充要条件是

$$q(x) \equiv 0$$

且两端均为第二类边界条件。

定理 3 与互异的两个固有值 λ_n，λ_m 对应的固有函数 $y_n(x)$，

$y_m(x)$带权 $\rho(x)$正交。即

$$\int_a^b \rho(x) y_n(x) y_m(x) \mathrm{d}x = 0 \qquad (4.1.12)$$

定理 4 （斯捷克洛夫(Стеклов)展开定理）。对于一个具有连续一阶导函数及分段连续二阶导函数的任意函数 $f(x)$，若满足所给的边界条件，则它一定可以按固有函数系$\{y_k(x)\}$展开成绝对且一致收敛的级数

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k y_k(x) \qquad (4.1.13)$$

其中

$$f_k = \frac{\int_a^b \rho(x) f(x) y_k(x) \mathrm{d}x}{\int_a^b \rho(x) y_k^2(x) \mathrm{d}x} \qquad (4.1.14)$$

我们只对定理 2、定理 3 给出证明，由于定理 1 和定理 4 的证明比较复杂，在此省略。

定理 2 的证明：先证 $\lambda_k \geqslant 0$，$k=1,2,\cdots$

设 $\lambda, y(x)$是方程(4.1.9)的任一组固有值与固有函数。则有

$$[k(x)y'(x)]' - q(x)y(x) = -\lambda\rho(x)y(x) \qquad (4.1.15)$$

用 $y(x)$乘式(4.1.15)两端并在$[a,b]$上求积分，利用分部积分公式得

$$\lambda\int_a^b \rho(x) y^2(x) \mathrm{d}x = -[k(x)y'(x)y(x)]_a^b + \int_a^b [q(x)y^2(x) + k(x)y'^2(x)] \mathrm{d}x \qquad (4.1.16)$$

由于在(a,b)内 $q(x) \geqslant 0$，$k(x) > 0$，$y(x) \not\equiv 0$，故

$$\int_a^b [q(x)y^2(x) + k(x)y'^2(x)] \mathrm{d}x \geqslant 0 \qquad (4.1.17)$$

所以

$$\lambda\int_a^b \rho(x) y^2(x) \mathrm{d}x \geqslant -[k(x)y'(x)y(x)]_a^b$$

$$= k(a)y'(a)y(a) - k(b)y'(b)y(b)$$

若在 $x=b$ 点有第一类边界条件 $y(b)=0$，或第二类边界条件 $y'(b)=0$，或自然边界条件 $y(b)<\infty, k(b)=0$，都有

$$k(b)y'(b)y(b) = 0$$

对第三类边界条件 $y'(b)+\sigma y(b)=0$ 时

$$k(b)y'(b)y(b) = -\sigma k(b)y^2(b) \leqslant 0$$

所以，不论何种边界条件都有

$$k(b)y'(b)y(b) \leqslant 0$$

同理，在 $x=a$ 点可得

$$k(a)y'(a)y(a) \geqslant 0$$

因此有

$$\lambda\int_a^b \rho(x)y^2(x)\mathrm{d}x \geqslant 0 \qquad (4.1.18)$$

在 (a,b) 内 $\rho(x)\geqslant\rho_0>0$ 且 $y(x)\not\equiv 0$，故有

$$\int_a^b \rho(x)y^2(x)\mathrm{d}x > 0 \qquad (4.1.19)$$

从而得到 $\lambda\geqslant 0$

经证第二部分内容，设在 $[a,b]$ 上 $k(x)>0$，λ 是(4.1.9)的固有值，由(4.1.16)得

$$-[k(x)y'(x)y(x)]_a^b + \int_a^b [q(x)y^2(x) + k(x)y'^2(x)]\mathrm{d}x = 0$$

由于无论何种边界条件都有

$$-[k(x)y'(x)y(x)]_a^b \geqslant 0$$

因此

$$\int_a^b [q(x)y^2(x) + k(x)y'^2(x)]\mathrm{d}x = 0$$

由于被积函数是连续非负的，所以有

$$q(x)y^2(x) \equiv 0,\ k(x)y'^2(x) \equiv 0$$

又 $y(x)\not\equiv 0$，故 $q(x)\equiv 0$。再注意到 $k(x)>0$，故有 $y'(x)\equiv 0$，从而有 $y'(a)=y'(b)=0$。

反之，当 $q(x)\equiv 0$ 且 $y'(a)=y'(b)=0$ 时，$y(x)\equiv 1$，显然是对应于 $\lambda=0$ 的固有函数。

定理 3 的证明 设 $y_m(x)$，$y_n(x)$是相应于不同固有值 λ_m，λ_n 的固有函数，所以有

$$[k(x)y_m'(x)]' - q(x)y_m(x) + \lambda_m\rho(x)y_m(x) = 0 \tag{4.1.20}$$

$$[k(x)y_n'(x)]' - q(x)y_n(x) + \lambda_n\rho(x)y_n(x) = 0 \tag{4.1.21}$$

用 $y_n(x)$，$y_m(x)$分别乘式(4.1.20)、式(4.1.21)并在$[a,b]$上求积分。相减得

$$\begin{aligned}(\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b \rho(x)y_m(x)y_n(x)\mathrm{d}x \\ = k(b)[y_n'(b)y_m(b) - y_m'(b)y_n(b) \\ - k(a)[y_n'(a)y_m(a) - y_m'(a)y_n(a)]\end{aligned} \tag{4.1.22}$$

显然，若 $y_m(b)=y_n(b)=0$ 或 $y_m'(b)=y_n'(b)=0$，或在自然边界条件下，$y(b)<\infty$必使 $k(b)=0$，均有

$$k(b)[y_n'(b)y_m(b) - y_m'(b)y_n(b)] = 0 \tag{4.1.23}$$

而在第三类边界条件下，即

$$y_m'(b) + \sigma y_m(b) = 0,\ y_n'(b) + \sigma y_n(b) = 0 \quad \sigma > 0$$

下，有

$$y_m'(b) = -\sigma y_m(b),\ y_n'(b) = -\sigma y_n(b) \tag{4.1.24}$$

将式(4.1.24)代入式(4.1.23)即得

$$k(b)[-\sigma y_n(b)y_m(b) + \sigma y_m(b)y_n(b)] = 0$$

于是在 $x=b$ 点处不论何种边界条件，式(4.1.22)右端第一项为零。同理可得在 $x=a$ 点处不论何种边界条件也使式(4.1.22)右端第二项为零。从而

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b \rho(x)y_m(x)y_n(x)\mathrm{d}x = 0$$

但 $\lambda_m\neq\lambda_n$，所以

$$\int_a^b \rho(x) y_m(x) y_n(x) \mathrm{d}x = 0 \quad m \neq n$$

§4.2 贝塞尔函数

1. 贝塞尔方程及其通解

贝塞尔方程常出现在圆柱对称的数学物理问题中，在§4.3节例1中，我们讨论圆盘瞬时温度分布规律时，将引出一个斯图姆-刘维尔方程的固有值问题。

$$\begin{cases} \rho^2 p''(\rho) + \rho p'(\rho) + (\lambda\rho^2 - k^2) p(\rho) = 0 & (4.2.1) \\ p(R) = 0 & (4.2.2) \\ p(0) < \infty & (4.2.3) \end{cases}$$

其中 k 为非负整数。

由于 $q(\rho) = \dfrac{k^2}{\rho} \geqslant 0$，根据§4.1节定理2，有固有值 $\lambda \geqslant 0$。

当 $\lambda = 0$ 时，方程(4.2.1)是尤拉方程。

当 $\lambda > 0$ 时，令 $r = \sqrt{\lambda}\rho$，记 $F(r) = p\left(\dfrac{r}{\sqrt{\lambda}}\right)$，则方程(4.2.1)化为

$$r^2 F''(r) + rF'(r) + (r^2 - k^2) F(r) = 0 \qquad (4.2.4)$$

这就是 k 阶贝塞尔方程最常见的形式。按惯例，我们仍以 x 表示自变量，以 y 表示未知函数，则 k 阶贝塞尔方程为

$$x^2 \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + x \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (x^2 - k^2) y = 0 \qquad (4.2.5)$$

一般说来，它的解不能用初等函数表示，只能表示为级数形式。因为贝塞尔方程很重要，所以它的基本解组的性质都已经用表详细列出。

下面我们来解 k 阶贝塞尔方程(4.2.5)。

先假定 $k \geqslant 0$，即限定 k 取非负实数，因为点 $x = 0$ 是贝塞尔方

程的奇点，所以按照费洛平纽斯方法，解可取为

$$y = x^C(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k + \cdots)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{C+k} \qquad a_0 \neq 0 \qquad (4.2.6)$$

其中常数 C 和 $a_k(k=0,1,2,\cdots)$ 可以通过把 y 及它的导数 y'、y'' 代入方程(4.2.5)来确定。

将式(4.2.6)代入式(4.2.5)，化简后得

$$(C^2 - k^2)a_0x^C + [(C+1)^2 - k^2]a_1x^{C+1}$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty}\{[(C+n)^2 - k^2]a_n + a_{n-2}\}x^{C+n} = 0$$

要使上式成为恒等式，必须 x 的各次幂的系数全为零，从而得到下列等式

(1) $(C^2-k^2)a_0=0$

(2) $[(C+1)^2-k^2]a_1=0$

(3) $[(C+n)^2-k^2]a_n+a_{n-2}=0 \quad n=2,3,\cdots$

对于任意的 $a_0\neq 0$，由方程(1)(称为指数方程)，得 $C^2-k^2=0$。从而有 $C_1=k$，$C_2=-k$，代入(2)得 $a_1=0$。

若 k 非整数，先取 $C_1=k$ 代入(3)得

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(2k+n)}$$

因为 $a_1=0$，故有

$$a_1 = 0,\ a_2 = \frac{a_0}{2(2k+2)} = -\frac{a_0}{2^2 1!(k+1)}$$

$$a_3 = 0,\ a_4 = -\frac{a_2}{4(2k+4)} = \frac{a_0}{2^4 2!(k+1)(k+2)}$$

$$a_5 = 0,\ a_6 = -\frac{a_0}{2^6 3!(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$\cdots\cdots$$

$$a_{2m-1} = 0 \quad m = 3,4,5,\cdots$$

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{a_0}{2^{2m} m!(k+1)(k+2)\cdots(k+m)}$$

对非零任意常数 a_0，通常取为

$$a_0 = \frac{1}{2^k \Gamma(k+1)}$$

则

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{1}{2^{k+2m} m! \Gamma(k+m+1)}$$

从而求得方程(4.2.5)的一个特解

$$y_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{k+2m}}{2^{k+2m} m! \Gamma(k+m+1)} \quad (k > 0)$$

不难验证上述级数在整条数轴上收敛，将和函数记为

$$J_k(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{k+2m}}{2^{k+2m} m! \Gamma(k+m+1)} \quad (k > 0) \tag{4.2.7}$$

其次，取 $c=-k$，用与上述同样的方法可得方程的另一解

$$y_2(x) = J_{-k}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{-k+2m}}{2^{-k+2m} m! \Gamma(-k+m+1)} \quad (k \neq 1,2,3,\cdots) \tag{4.2.8}$$

式(4.2.7)、式(4.2.8)分别称为 k 阶和 $-k$ 阶**第一类贝塞尔函数**。

因为 $k \neq -k$，故 $J_k(x)$ 与 $J_{-k}(x)$ 线性无关。由常微分方程解的结构定理知，贝塞尔方程(4.2.5)的通解为

$$y(x) = AJ_k(x) + BJ_{-k}(x) \tag{4.2.9}$$

其中 A、B 为任意常数。

如果 k 是整数，不妨设 k 为正整数 N，这时，当 $m=0,1,2,\cdots,N-1$ 时，$-k+m+1$ 为负整数或零。由 Γ 函数的性质，$\frac{1}{\Gamma(-k+m+1)}=0$。因此级数(4.2.8)中实际上从 $m=N$ 起才开始有非零项，于是式(4.2.8)可写成

$$J_{-N}(x) = \sum_{m=N}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(-N+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-N+2m} = \sum_{m=N}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(-N+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-N+2m}$$

令 $m-N=n$，则

$$J_{-N}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+N}}{(n+N)!\Gamma(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{N+2n}$$

$$=(-1)^N\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(N+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{N+2n}$$

$$=(-1)^N J_N(x) \tag{4.2.10}$$

即 J_{-k} 与 J_k 不是线性无关的，为了组成贝塞尔方程的通解，必须另找一个与 $J_k(x)$ 线性无关的特解。

在文献中已经讨论了一些不同的这样的特解，但最常用的一个解是

$$Y_k(x)=\frac{(\cos k\pi)J_k(x)-J_{-k}(x)}{\sin k\pi} \tag{4.2.11}$$

当 k 是非整数时，$Y_k(x)$ 与 $J_k(x)$ 显然线性无关，当 k 为整数时，我们定义：

$$Y_k(x)=\lim_{\alpha\to k}\frac{(\cos\alpha\pi)J_\alpha(x)-J_{-\alpha}(x)}{\sin\alpha\pi} \tag{4.2.12}$$

由式(4.2.11)、(4.2.12)所确定的函数称为 k 阶**第二类贝塞尔函数**。可以证明，$Y_k(x)$ 确是 k 阶贝塞尔方程的一个特解，它与 $J_k(x)$ 是线性无关的。因此，贝塞尔方程的通解为：

$$\begin{cases} y(x)=AJ_k(x)+BJ_{-k}(x) & \text{当 } k \text{ 不是整数} \\ y(x)=AJ_n(x)+BY_n(x) & \text{当 } k=n \text{ 是整数} \\ y(x)=AJ_k(x)+BY_k(x) & \text{当 } k \text{ 是一切实数} \end{cases} \tag{4.2.13}$$

整数阶贝塞尔函数比较重要，特别是

$$J_0(x)=1-\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4+\frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6+\cdots$$

$$J_1(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\frac{1}{2!3!}\left(\frac{x}{2}\right)^5-\cdots$$

经常用到。

2. 贝塞尔函数的零点，递推公式

使 $J_k(x)=0$ 或 $Y_k(x)=0$ 的 x 值，称为贝塞尔函数的零点。关于它们已有详细的函数表可供查阅，下面是 $J_0(x)$、$J_1(x)$、$Y_0(x)$、$Y_1(x)$ 的图形。

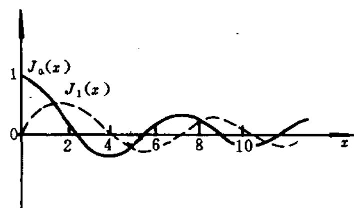


图 4-1

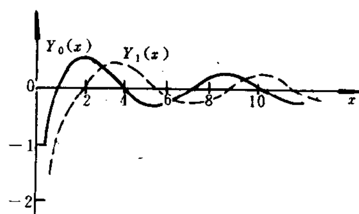


图 4-2

关于 $J_k(x)$ 的零点有以下几个重要结论。

(1) $J_k(x)$ 有无穷多个单重实零点，且这无穷多个零点在 x 轴上关于原点是对称分布着的；故 $J_k(x)$ 有无穷多个正的零点；

(2) $J_k(x)$ 的零点与 $J_{k+1}(x)$ 的零点是彼此相间分布的，即 $J_k(x)$ 的任意两个相邻零点之间必存在一个且仅有一个 $J_{k+1}(x)$ 的零点；

(3) 若以 $\mu_m^{(k)}$ 表示 $J_k(x)$ 的正零点，则 $\mu_{m+1}^{(k)}-\mu_m^{(k)}$ 当 $m\to\infty$ 时以 π 为极限，即 $J_k(x)$ 几乎是以 2π 为周期的周期函数。

不同阶的贝塞尔函数之间有一定的联系，这就是贝塞尔函数的递推公式，我们不加证明地列出一些有用的递推公式

$$J_{k-1}(x)+J_{k-1}(x)=\frac{2k}{x}J_k(x) \tag{4.2.14}$$

$$kJ_k(x)+xJ_k'(x)=xJ_{k-1}(x) \tag{4.2.15}$$

$$kJ_k(x)-xJ_k'(x)=xJ_{k+1}(x) \tag{4.2.16}$$

$$J_{k-1}(x)-J_{k+1}(x)=2J_k'(x) \tag{4.2.17}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^kJ_k(x)]=x^kJ_{k-1}(x) \tag{4.2.18}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-k}J_k(x)] = -x^{-k}J_{k+1}(x) \tag{4.2.19}$$

所有这些递推公式对 Y_k 也都成立。

现在利用递推公式来阐明半奇数阶的贝塞尔函数都可表为初等函数。

首先利用式(4.2.7)及 $\Gamma(\frac{3}{2}+k)=\frac{(2k+1)!!}{2^{k+1}}\sqrt{\pi}$ 可算得

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \tag{4.2.20}$$

同理

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x \tag{4.2.21}$$

利用递推公式(4.2.14)得

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \frac{1}{x}J_{\frac{1}{2}}(x) - J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}(-\cos x + \frac{1}{x}\sin x)$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

同理

$$J_{-\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\left(\frac{\cos x}{x}\right)$$

一般地有

$$J_{k+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^k\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^k\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$J_{-(k+\frac{1}{2})}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^k\left(\frac{\cos x}{x}\right)$$

这里,微分算子$\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^k$表示算子$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$连续作用 k 次。

作为递推公式的一个应用,我们来推导贝塞尔函数的一些积

分公式。由公式(4.2.18)有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[t^{k+1}J_{k+1}(t)] = t^{k+1}J_k(t)$$

令 $t=ax$，上式变成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(ax)^{k+1}J_{k+1}(ax)]\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (ax)^{k+1}J_k(ax)$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{k+1}\frac{J_{k+1}(ax)}{a}] = x^{k+1}J_k(ax) \tag{4.2.22}$$

于是可得

$$\int x^{k+1}J_k(ax)\mathrm{d}x = x^{k+1}\frac{J_{k+1}(ax)}{a} + C \tag{4.2.23}$$

其中 C 为积分常数。

当 $k>-1$，$a>0$ 时，积分

$$\int_0^1 x^{k+1}J_k(ax)\mathrm{d}x = \left[x^{k+1}\frac{J_{k+1}(ax)}{a}\right]_0^1$$

注意到 $k+1>0$，$J_{k+1}(ax)|_{x=0}=0$，所以有

$$\int_0^1 x^{k+1}J_k(ax)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}J_{k+1}(a) \tag{4.2.24}$$

在实践中还会遇到其它类型的贝塞尔函数，如当我们在圆柱域内求解定解问题，圆柱上下两底的边界条件是齐次的，侧面的边界条件是非齐次的时，就会遇到

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \left(1 + \frac{k^2}{x^2}\right)y = 0 \tag{4.2.25}$$

这样的方程。它和贝塞尔方程仅有一项的符号有差别。所以，我们自然会想到作变量代换，将方程式(4.2.25)转化为贝塞尔方程，即求得它的通解。令 $x=-it$，则 $\mathrm{d}x=-i\mathrm{d}t$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$$

将它们代入式(4.2.25)得

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{1}{t}\frac{dy}{dt}+\left(1-\frac{k^2}{t^2}\right)y=0$$

由此知，式(4.2.25)的通解为

$$y=AJ_k(ix)+BY_k(ix)$$

其中
$$J_k(ix)=i^k\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{k+2m}}{2^{k+2m}m!\Gamma(k+m+1)}$$

将上式乘以 i^{-k}，我们就定义它为**第一类虚宗量的贝塞尔函数**，或称为**第一类变形的贝塞尔函数**。并记作

$$I_k(x)=i^{-k}J_k(ix)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{k+2m}}{2^{k+2m}m!\Gamma(k+m+1)} \tag{4.2.26}$$

特别地，

$$I_0(x)=1+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^4(2!)^2}+\frac{x^6}{2^6(3!)^2}+\cdots$$

关于**第二类虚宗量贝塞尔函数**或称**第二类变形的贝塞尔函数** $K_k(x)$定义如下：

当 k 是非整数时

$$K_k(x)=\frac{\frac{1}{2}\pi[I_{-k}(x)-I_k(x)]}{\sin k\pi}$$

当 k 为整数时

$$K_k(x)=\lim_{a\to k}\frac{\frac{1}{2}\pi[I_{-k}(x)-I_a(x)]}{\sin \alpha x} \tag{4.2.27}$$

所以方程(4.2.25)的通解又可写为

$$y=AI_k(x)+BK_k(x) \qquad A,B\ 为任意常数$$

I_k 与 K_k 不存在实的零点。

3. 函数的富里埃-贝塞尔级数

我们知道，三角函数系($\sin k_nx$, $\cos k_nx$)有正交性，可以进行富里埃展开(级数与积分)，贝塞尔函数系也有所谓广义正交性和

广义富里埃展开。

设 $0<\mu_1^{(k)}<\mu_2^{(k)}<\cdots<\mu_i^{(k)}<\mu_{i+1}^{(k)}<\cdots$ 为 $J_k(x)$ 的正根，又已知 $J_k(nr)$ 满足方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}J_k\right)+\left(n^2r-\frac{k^2}{r}\right)J_k=0$$

对任意给定的正数 l，记 $\frac{\mu_i^{(k)}}{l}=n_i^{(k)}$，即 $\mu_i^{(k)}=n_i^{(k)}l$，于是有

定理 1 k 阶贝塞尔函数 $J_k(n_1^{(k)}r)$，$J_k(n_2^{(k)}r)$，$\cdots$，$J_k(n_i^{(k)}r)\cdots$ 在区间 $[0,l]$ 上带权 r 正交，即有正交归一关系式

$$\int_0^l rJ_k(n_i^{(k)}r)J_k(n_j^{(k)}r)\mathrm{d}r$$

$$=\begin{cases}0 & i\neq j\\ \frac{l^2}{2}J_{k-1}^2(n_i^{(k)}l)=\frac{l^2}{2}J_{k+1}^2(n_i^{(k)}l) & i=j\end{cases}\quad i,j=1,2,3,\cdots \tag{4.2.28}$$

通常称

$$\sqrt{\int_0^l rJ_k^2(n_i^{(k)}r)\mathrm{d}r}=\frac{l}{\sqrt{2}}J_{k+1}(n_i^{(k)}l)$$

为贝塞尔函数 $J_k(n_i^{(k)}r)$ 的模值。

证明：设 $J_k(n_i^{(k)}r)$ 与 $J_k(n_j^{(k)}r)$ 分别满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}J_k(n_i^{(k)}r)}{\mathrm{d}r}\right]+\left[(n_i^{(k)})^2r-\frac{k^2}{r}\right]J_k(n_i^{(k)}r)=0 \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}J_k(n_j^{(k)}r)}{\mathrm{d}r}\right]+\left[(n_j^{(k)})^2r-\frac{k^2}{r}\right]J_k(n_j^{(k)}r)=0 \tag{2}$$

用 $J_k(n_j^{(k)}r)$ 乘式(1)，$J_k(n_i^{(k)}r)$ 乘式(2)，相减后再积分得

$$\left[(n_i^{(k)})^2-(n_j^{(k)})^2\right]\int_0^l rJ_k(n_i^{(k)}r)J_k(n_j^{(k)}r)\mathrm{d}r$$

$$=\left[rJ_k(n_i^{(k)}r)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}J_k(n_j^{(k)}r)-rJ_k(n_j^{(k)}r)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}J_k(n_i^{(k)}r)\right]_0^l \tag{3}$$

由于 $n_i^{(k)}\neq n_j^{(k)}$，于是有

$$\int_0^l rJ_k(n_i^{(k)}r)J_k(n_j^{(k)}r)\mathrm{d}r = 0 \quad (i \neq j)$$

将(3)式中的 $n_j^{(k)}$ 换为参数 α，则有

$$\int_0^l rJ_k(n_i^{(k)}r)J_k(\alpha r)\mathrm{d}r = -\frac{ln_i^{(k)}J_k'(n_i^{(k)}l)J_k(\alpha l)}{(n_i^{(k)})^2 - \alpha^2} \tag{4}$$

令 $\alpha \to n_i^{(k)}$，上式左端的极限为

$$\int_0^l rJ_k^2(n_i^{(k)}r)\mathrm{d}r$$

右端是未定型，由洛必塔法则有

$$\lim_{\alpha \to n_i^{(k)}}\left[-\frac{ln_i^{(k)}J_k'(n_i^{(k)}l)J_k(\alpha l)}{(n_i^{(k)})^2 - \alpha^2}\right]$$

$$= \lim_{\alpha \to n_i^{(k)}} \frac{-l^2 n_i^{(k)}J_k'(n_i^{(k)}l)J_k'(\alpha l)}{-2\alpha}$$

$$= \frac{l^2}{2}[J_k'(n_i^{(k)}l)]^2$$

利用递推公式有

$$[J_k'(n_i^{(k)}l)]^2 = [J_{k+1}(n_i^{(k)}l)]^2$$

于是式(4.2.25)得证。

定理 2 设函数 $f(x)$在区间$(0,l)$内有连续的一阶导数和分段连续的二阶导数，且 $f(0)$有界，$f(l)=0$，则 $f(x)$可以展开为如下的绝对一致收敛的级数

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i J_1(n_i^{(k)}x) \tag{4.2.29}$$

其中

$$C_i = \frac{2}{l^2 J_{k+1}^2(n_i^{(k)}l)}\int_0^l xf(x)J_k(n_i^{(k)}x)\mathrm{d}x \quad i = 1,2,3,\cdots \tag{4.2.30}$$

例 4 设 $\mu_i(i=1,2,3,\cdots)$是方程 $J_1(x)=0$ 的正根，将函数

$$f(x) = x \qquad (0 < x < 1)$$

展开成贝塞尔函数 $J_1(\mu_i x)$的级数。

解：设 $\quad x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i J_1(\mu_i x)$

由式(4.2.30)、式(4.2.28)知

$$C_i = \frac{2\int_0^l x^2 J_1(\mu_i x)\mathrm{d}x}{J_0^2(\mu_i)}$$

令 $\mu_i x = \xi$，则

$$\begin{aligned}\int_0^l x^2 J_1(\mu_i x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{\mu_i^3}\int_0^{\mu_i} \xi^2 J_1(\xi)\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{\mu_i^3}\left[-\xi^2 J_0(\xi)\Big|_0^{\mu_i} + \int_0^{\mu_i} 2\xi J_0(\xi)\mathrm{d}\xi\right. \\ &= \frac{1}{\mu_i^3}\{-\mu_i^2 J_0(\mu_i) + [2\xi J_1(\xi)]_0^{\mu_i}\} \\ &= \frac{1}{\mu_i^3}[-\mu_i^2 J_0(\mu_i)] \quad i = 1,2,3,\cdots\end{aligned}$$

代入式(1)得

$$\begin{aligned}x &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{-2J_0(\mu_i)}{\mu_i J_0^2(\mu_i)} J_1(\mu_i x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{-2}{\mu_i J_0(\mu_i)} J_1(\mu_i x) \quad (0 < x < 1)\end{aligned}$$

例5 利用递推公式证明

(1) $J_2(x) = J_0''(x) - \frac{1}{x}J_0'(x)$

(2) $J_3(x) = -3J_0'(x) - 4J_0'''(x)$

证：(1) 由式(4.2.14)、式(4.2.17)可得

$$xJ_k'(x) - kJ_k(x) = -xJ_{k+1}(x) \tag{1}$$

$$xJ_k'(x) + kJ_k(x) = xJ_{k-1}(x) \tag{2}$$

由式(4.2.18)有

$$J_0' = J_{-1} = -J_1$$

故

$$-J_0''(x) = J_1'(x) \tag{3}$$

在式(1)中令 $k=1$，并利用式(3)得

$$xJ_2(x) = J_1(x) - xJ_1'(x) = -J_0'(x) + xJ_0''(x)$$

故

$$J_2(x) = J_0''(x) - \frac{1}{x}J_0'(x)$$

(2) 由式(4.2.17)得

$$J_0(x) - J_2(x) = 2J_1'(x) \tag{4}$$

$$J_1(x) - J_3(x) = 2J_2'(x) \tag{5}$$

由式(4)得 $J_2'(x) = J_0'(x) - 2J_1''(x)$ 代入式(5)得

$$2J_0'(x) - 4J_1''(x) = J_1(x) - J_3(x) \tag{6}$$

将 $J_1(x) = -J_0'(x)$ 及 $J_1''(x) = -J_0'''(x)$ 代入式(6)得

$$J_3(x) + 3J_0'(x) + 4J_0'''(x) = 0$$

例 6 证明

(1) $$\int x^n J_0(x)\mathrm{d}x = x^n J_1(x) + (n-1)x^{n-1}J_0(x) - (n-1)^2\int x^{n-2}J_0(x)\mathrm{d}x$$

(2) $$\int_0^x x^3 J_0(x)\mathrm{d}x = 2x^2 J_0(x) + (x^3 - 4x)J_1(x)$$

证:(1) 由 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[xJ_1(x)] = x_0 J_0(x)$ 及 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J_0(x) = J_{-1}(x) = -J_1(x)$ 有

$$\int x^n J_0(x)\mathrm{d}x = \int x^{n-1}\mathrm{d}xJ_1(x)$$

$$= x^n J_1(x) - (n-1)\int x^{n-1}J_1(x)\mathrm{d}x$$

$$= x^n J_1(x) + (n-1)\int x^{n-1}\mathrm{d}J_0(x)$$

$$= x^n J_1(x) + (n-1)x^{n-1}J_0(x) - (n-1)^2\int x^{n-2}J_0(x)\mathrm{d}x$$

(2) 由式(1)得

$$\int_0^x x^3 J_0(x)\mathrm{d}x = x^3 J_1(x) + 2x^2 J_0(x) - 4\int_0^x xJ_0(x)\mathrm{d}x$$

$$= x^3J_1(x) + 2x^2J_0(x) - 4\int_0^x \mathrm{d}xJ_1(x)$$

$$= x^3J_1(x) + 2x^2J_0(x) - 4xJ_1(x)$$

$$= 2x^2J_0(x) + (x^3 - 4x)J_1(x)$$

§4.3 贝塞尔函数应用举例

例7 考察边界固定的均匀圆形膜的微小横振动。

设有半径为 l 的薄弹性圆膜，取圆心为坐标原点，则有混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0,\ x^2 + y^2 < l^2 \quad t > 0 & (4.3.1) \\ u|_{x^2-y^2=l^2} = 0 \qquad t > 0 & (4.3.2) \\ u|_{t=0} = \varphi(x,y),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x,y),\ x^2 + y^2 \leqslant l^2 & (4.3.3) \end{cases}$$

解：令 $u(x,y,t)=U(x,y)T(t)$，代入泛定方程(4.3.1)及边界条件式(4.3.2)，分离变量后得

$$T'' + a^2k^2T(t) = 0 \qquad (4.3.4)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} + n^2U = 0 \\ U|_{x^2+y^2=l^2} = 0 \end{cases} \qquad (4.3.5)$$

采用极坐标，这时式(4.3.5)化为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial U}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + n^2U = 0 \qquad \rho < l \\ U(l,\theta) = 0,\ U(\rho,\theta) = U(\rho,\theta + 2\pi) \end{cases} \qquad (4.3.6)$$

由分离变量法，令 $U(\rho,\theta)=R(\rho)\Theta(\theta)$，代入式(4.3.6)得

$$\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = -\frac{\rho^2R''(\rho) + \rho R'(\rho) + n^2\rho^2R(\rho)}{R(\rho)} = -\lambda^2$$

从而有两个固有值问题

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) + \lambda^2\Theta(\theta) = 0 \\ \Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi) \end{cases} \qquad (4.3.7)$$

$$\begin{cases} R'' + \dfrac{1}{\rho}R' + \left(n^2 - \dfrac{\lambda^2}{\rho^2}\right)R = 0 \\ R(l) = 0 \end{cases} \tag{4.3.8}$$

易知，式(4.3.7)的固有值和固有函数为

$$\lambda_k = k \quad \Theta_k(\theta) = A_k\cos k\theta + B_k\sin k\theta \quad (k = 1,2,3,\cdots) \tag{4.3.9}$$

将 $\lambda_k = k$ 代入式(4.3.8)，并注意到式(4.3.8)中的方程为贝塞尔方程，得通解

$$R_k(\rho) = AJ_k(n\rho) + BY_k(n\rho) \quad (k = 0,1,2,\cdots)$$

这里 $J_k(x)$和 $Y_k(x)$分别为 k 阶第一类贝塞尔函数和第二类贝塞尔函数(或牛曼(Neumamn)函数)。由于 $\rho \to 0$ 时 $Y_n(n\rho)$无界，而 u 应有界，故 $B=0$，为确定 n，由 $R(l)=0$ 得

$$J_k(nl) = 0 \quad (k = 0,1,2,\cdots) \tag{4.3.10}$$

设 $\mu_1^{(k)} < \mu_2^{(k)} < \cdots < \mu_m^{(k)} < \cdots$ 为 $J_k(x)=0$ 的正根，则

$$n_{mk} = \frac{\mu_m^{(k)}}{l} \quad (k = 0,1,2,\cdots,); \; m = 1,2,3,\cdots \tag{4.3.11}$$

记 $\omega_{mk}^2 = a^2 n_{mk}^2$，代入式(4.3.4)可解得

$$T_{mk}(t) = \alpha_{mk}\cos\omega_{mk}t + \beta_{mk}\sin\omega_{nk}t \tag{4.3.12}$$

记 $$u_{mk}(\rho,\theta,t) = (\alpha_{mk}\cos\omega_{mk}t + \beta_{mk}\sin\omega_{mk}t)\cos k\theta J_k(n_{mk}\rho) + (r_{mk}\cos\omega_{mk}t + \zeta_{mk}\sin\omega_{mk}t)\sin k\theta J_k(n_{mk}\rho)$$

则 u_{mk}显然满足式(4.3.1)和式(4.3.2)，为使初始条件式(4.3.3)也得到满足，作二重级数

$$u(\rho,\theta,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} u_{mk}(\rho,\theta,t) \tag{4.3.13}$$

若式(4.3.13)右端的级数关于 ρ,θ,t 都一致收敛且可逐项微分两次，则式(4.3.13)满足方程式(4.3.1)及边界条件式(4.3.2)，其中的系数由式(4.3.3)利用贝塞尔函数确定。

例 8　薄圆盘的热传导问题

设有半径为 1 的均匀圆盘，盘面绝热，在圆盘周边上温度为

零，在初始时刻圆盘内的温度分布为 $1-x^2-y^2$，求 $t>0$ 时圆盘内温度分布规律。

解：问题归结为二维热传导方程的混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),\ 0<x^2+y^2<1 \quad t>0 & (4.3.14) \\ u|_{x^2+y^2=1}=0 \qquad t>0 & (4.3.15) \\ u|_{t=0}=1-x^2-y^2,\ x^2+y^2\leqslant 1 & (4.3.16) \end{cases}$$

因为是圆域，采用极坐标。又因为区域及定解条件、泛定方程关于 x、y 都对称，所以温度 u 仅是 ρ,t 的函数而与 θ 无关。于是上述问题化为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \rho}\right) \quad 0<\rho<r & (4.3.17) \\ u|_{\rho=1}=0 & (4.3.18) \\ u|_{t=0}=1-\rho^2 & (4.3.19) \end{cases}$$

此外，由物理意义知，还有条件 $|u|<\infty$ 且 $t\to\infty$ 时，$u\to 0$。

令 $u(\rho,t)=R(\rho)T(t)$，代入方程式(4.3.17)得

$$\frac{T'}{a^2T}=\frac{R''+\dfrac{1}{\rho}R'}{R}=-\lambda$$

由此得

$$\rho^2R''+\rho R'+\lambda\rho^2R=0 \qquad (4.3.20)$$

$$T'+a\lambda T=0 \qquad (4.3.21)$$

方程(4.3.21)的解是

$$T(t)=Ce^{-a^2\lambda t}$$

因为 $t\to+\infty$ 时，$u\to 0$，所以 $\lambda>0$，令 $\lambda=\alpha^2$，则

$$T(t)=Ce^{-a^2\alpha^2 t}$$

此时方程(4.3.20)的通解为

$$R(\rho)=AJ_0(\alpha\rho)+BY_0(\alpha\rho)$$

由 $u(\rho,t)$ 的有界性，可知 $B=0$。再由式(4.3.18)得 $J_0(x)=0$，即 α

是 $J_0(x)$ 的零点，以 $\mu_m^{(0)}$ 表示 $J_0(x)$ 的正零点，则

$$\alpha = \mu_m^{(0)} \qquad m = 1,2,3,\cdots$$

于是我们得到

$$R_m(\rho) = J_0(\mu_m^{(0)}\rho),\ T_m(t) = C_m \mathrm{e}^{-a^2(\mu_m^0\rho)^2 t}$$

从而

$$u_m(\rho,t) = C_m \mathrm{e}^{-a^2(\mu_m^{(0)}\rho)^2 t} J_0(\mu_m^{(0)}\rho)$$

利用迭加原理，问题的解是

$$u(\rho,t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \mathrm{e}^{-a^2(\mu_m^{(0)})^2 t} J_0(\mu_m^{(0)}\rho)$$

由条件式(4.3.19)得

$$1 - \rho^2 = \sum_{m=1}^{\infty} C_m J_0(\mu_m^{(0)}\rho)$$

从而

$$C_m = \frac{2}{J_1^2(\mu_m^{(0)})}\left[\int_0^1 \rho J_0(\mu_m^{(0)}\rho)\mathrm{d}\rho - \int_0^1 \rho^3 J_0(\mu_m^{(0)}\rho)\mathrm{d}\rho\right]$$

由式(4.2.19)有

$$\mathrm{d}[(\mu_m^{(0)}\rho)J_1(\mu_m^{(0)}\rho)] = (\mu_m^{(0)}\rho)[J_0(\mu_m^{(0)}\rho)\mathrm{d}(\mu_m^{(0)}\rho)]$$

即

$$\mathrm{d}\left[\frac{\rho J_1(\mu_m^{(0)}\rho)}{\mu_m^{(0)}}\right] = \rho J_0(\mu_m^{(0)}\rho)\mathrm{d}\rho$$

故得

$$\int_0^1 \rho J_0(\mu_m^{(0)}\rho)\mathrm{d}\rho = \left.\frac{\rho J_1(\mu_m^{(0)}\rho)}{\mu_m^{(0)}}\right|_0^1 = \frac{J_1(\mu_m^{(0)})}{\mu_m^{(0)}}$$

此结果也可直接利用式(4.2.26)得出。

由于

$$\int_0^1 \rho^3 J_0(\mu_m^{(0)}\rho)\mathrm{d}\rho = \int_0^1 \rho^2 \mathrm{d}\,\frac{\rho J_1(\mu_m^{(0)}\rho)}{\mu_m^{(0)}}$$

$$= \left.\frac{\rho^3 J_1(\mu_m^{(0)}\rho)}{\mu_m^{(0)}}\right|_0^1 - \frac{2}{\mu_m^{(0)}}\int_0^1 \rho^2 J_1(\mu_m^{(0)}\rho)\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{J_1(\mu_m^{(0)})}{\mu_m^{(0)}} - \frac{2}{(\mu_m^{(0)})^2}\rho^2 J_2(\mu_m^{(0)}\rho)\Big|_0^1$$

$$= \frac{J_1(\mu_m^{(0)})}{\mu_m^{(0)}} - \frac{2J_2(\mu_m^{(0)})}{(\mu_m^{(0)})^2}$$

所以

$$C_m = \frac{4J_2(\mu_m^{(0)})}{(\mu_m^{(0)})^2 J_1^2(\mu_m^{(0)})}$$

故所求定解问题的解是

$$u(\rho,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4J_2(\mu_m^{(0)})}{(\mu_m^{(0)})^2 J_1^2(\mu_m^{(0)})} J_0(\mu_m^{(0)}\rho) e^{-a^2(\mu_m^{(0)})^2 t}$$

其中 $\mu_m^{(0)}$ 是 $J_0(\rho)$的正根。

§4.4 勒让德函数

1. 勒让德多项式、递推公式

在球坐标系下，应用分离变量法于拉普拉斯方程时，就会得到形如

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right)y = 0 \quad (4.4.1)$$

的变系数二阶线性常微分方程，称之为**连带(缔合)勒让德方程**，其中 λ 为待定常数，m 为非负整数。当 $m=0$ 时，则得

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \lambda y = 0 \quad (4.4.2)$$

称之为**勒让德**(Legendre)**方程**。

现在我们来寻求方程(4.4.2)在闭区间[-1,1]上的有界非零解。令 $\lambda=k(k+1)$的形式($k=0,1,2,3,\cdots$)，从而有

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + k(k+1)y = 0 \quad (4.4.3)$$

式(4.4.3)称为 k **阶勒让德方程**。类似于贝塞尔方程的求解，可用

幂级数求解法。因为方程(4.4.3)的系数 $p(x)=\frac{2x}{1-x^2}$，$q(x)=\frac{k(k+1)}{1-x^2}$都可在$-1<x<1$内展开为$x$的幂级数，故可设方程(4.4.3)的解为

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \tag{4.4.4}$$

把这个级数逐项微分并代入方程(4.4.3)，得到

$$\sum_{n=2}^{\infty}\{n(n-1)a_n+[k(k+1)-(n-1)(n-2)]a_{n-2}\}x^{n-2}=0$$

因此，幂级数解的系数必须满足下列递推公式

$$a_n=\frac{(n-1)(n-2)-k(k+1)}{n(n-1)}a_{n-2}\quad n\geqslant 2 \tag{4.4.5}$$

由这个递推公式，根据 a_0 可确定 $a_2,a_4,a_6,\cdots$，根据 a_1 可确定 a_3，$a_5,a_7,\cdots$而 a_0 和 a_1 都是任意的。这正是我们所需要的，因为在二阶微分方程的通解中应该有两个任意常数。

在递推公式(4.4.5)中，用$n+2$代换n得递推公式的另一个形式

$$a_{n+2}=\frac{(n+1)n-k(k+1)}{(n+1)(n+2)}a_n$$

$$=-\frac{(k-n)(k+n+1)}{(n+1)(n+2)}a_n\quad n=0,1,2,\cdots \tag{4.4.6}$$

在式(4.4.6)中依次令$n=0,2,4,\cdots,2i,\cdots$分别得

$$a_2=(-1)^1\frac{k(k+1)}{2!}a_0$$

$$a_4=(-1)^2\frac{k(k-2)(k+1)(k+3)}{4!}a_0$$

$$a_6=(-1)^3\frac{k(k-2)(k-4)(k+1)(k+3)(k+5)}{6!}a_0$$

$$\cdots$$

$$a_{2i} = (-1)^i \frac{k(k-2)\cdots(k-2i+2)(k+1)(k+3)\cdots(k+2i-1)}{(2i)!}a_0$$

$\cdots$

再令 $n=1,3,5,\cdots,(2i-1),\cdots$,分别得

$$a_3 = -\frac{(k-1)(k+2)}{3!}a_1$$

$$a_5 = (-1)^2\frac{(k-1)(k-3)(k+2)(k+4)}{5!}a_1$$

$\cdots$

$$a_{2i+1} = (-1)^i \cdot \frac{(k-1)(k-3)\cdots(k-2i+1)(k+2)(k+4)\cdots(k+2i)}{(2i+1)!}a_1$$

$\cdots$

将这些值代入式(4.4.4)得勒让德方程的通解为

$$\begin{aligned}
y(x) &= a_0\left[1-\frac{k(k+1)}{2!}x^2+\frac{k(k-2)(k+1)(k+3)}{4!}x^4-\cdots\right] \\
&+ a_1\left[x-\frac{(k-1)(k+2)}{3!}x^3 + \frac{(k-1)(k-3)(k+2)(k+4)}{5!}x^5-\cdots\right] \\
&= a_0\left[1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i k(k-2)\cdots(k-2i+2)(k+1)(k+3)\cdots(k+2i-1)}{(2i)!}x^{2i}\right] \\
&+ a_1\left[x+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i(k-1)(k-3)\cdots(k-2i+1)(k+2)(k+4)\cdots(k+2i)}{(2i+1)!}x^{2i+1}\right] \\
&= a_0P_k(x)+a_1Q_k(x)
\end{aligned} \tag{4.4.7}$$

不难证明,级数 $P_k(x)$和 $Q_k(x)$当$|x|<1$ 时收敛,且是线性无关的。

当 k 为非负整数时,由递推公式(4.4.6)可以看出,当 $n=k$ 时

有 $a_{k+2}=0$，按递推公式得

$$a_{k+2}=a_{k+4}=\cdots=0$$

所以，当 k 为偶数时，级数 $P_k(x)$ 只到 x^k 项为止。而 $Q_k(x)$ 仍是无穷级数；当 k 为奇数时，级数 $Q_k(x)$ 只到 x^k 项为止，而 $P_k(x)$ 仍是无穷级数。

下面我们给出 $P_k(x)$ 或 $q_k(x)$ 为多项式的表达式。

无论 k 为奇数或偶数，这些多项式可按 x 的降幂写出其不为零的系数。这些系数由公式(4.4.6)的如下形式给出

$$a_n=-\frac{(n+2)(n+1)}{(k-n)(k+n+1)}a_{n+2} \quad n\leqslant k-2 \quad (4.4.8)$$

即可以通过多项式的最高项系数 a_k 来表示其它各次幂项的系数。

$$a_{k-2}=-\frac{k(k-1)}{2(2k-1)}a_k$$

$$a_{k-4}=-\frac{(k-2)(k-3)}{4(2k-3)}a_{k-2}=\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{2\cdot 4(2k-1)(2k-3)}a_k$$

$$\cdots$$

为使表达式比较简洁且使所得多项式在 $x=1$ 处取值等于 1，我们取 a_k 为

$$a_k=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{k!}=\frac{(2k)!}{2^k(k!)^2} \qquad (k=1,2,3,\cdots)$$

从而相应地有

$$\begin{aligned}a_{k-2}&=-\frac{k(k-1)}{2(2k-1)}\cdot\frac{(2k)!}{2^k(k!)^2}\\&=-\frac{k(k-1)2k(2k-1)(2k-2)!}{2(2k-1)2^k k(k-1)!k(k-1)(k-2)!}\\&=(-1)\frac{(2k-2)!}{2^k(k-1)!(k-2)!}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_{k-4}&=-\frac{(k-2)(k-3)}{4(2k-3)}\cdot\left(-\frac{(2k-2)!}{2^k(k-1)!(k-2)!}\right)\\&=(-1)^2\end{aligned}$$

$$\cdot \frac{(k-2)(k-3)(2k-2)(2k-3)(2k-4)!}{4\cdot 2^n(2k-3)(k-1)(k-2)!(k-2)(k-3)(k-4)!}$$

$$=(-1)^2\frac{(2k-4)!}{2^k\cdot 2!(k-2)!(k-4)!}$$

$$a_{k-6}=(-1)^3\frac{(2k-6)!}{2^k\cdot 3!(k-3)!(k-6)!}$$

一般地，当 $k-2m\geqslant 0$ 时

$$a_{k-2m}=(-1)^m\frac{(2k-2m)!}{2^k\cdot m!(k-m)!(k-2m)!}$$

如果 k 为正偶数，将这些系数代入 $P_k(x)$；如果 k 为正奇数，则代入 $Q_k(x)$。将这两个结果写成统一的形式

$$P_k=\sum_{m=0}^{N}(-1)^m\frac{(2k-2m)!}{2^k\cdot m!(k-m)!(k-2m)!}x^{k-2m} \tag{4.4.9}$$

其中

$$N=\begin{cases}\frac{k}{2},\ \text{当 } k \text{ 为偶数}\\ \frac{k-1}{2},\ \text{当 } k \text{ 为奇数}\end{cases}$$

并称为 k 次**勒让德多项式**或**第一类勒让德函数**特别地，当 $k=0$，1，2，3，4，5 时，有

$$P_0(x)=1,\ P_1(x)=x$$

$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

$$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$$

$$P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$$

它们的图形如图 4-3 所示。

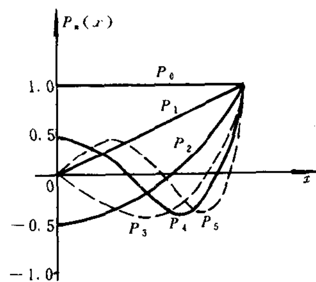


图 4-3

我们已知，对于给定的非负整数 k，勒让德方程的基本解 $P_k(x)$和 $Q_k(x)$中，只有一个解是多项式，另一个解是无穷级数，方程(4.4.3)的通解是

$$y(x) = AP_k(x) + BQ_k(x)$$

其中，无穷级数那个解，例如 $Q_k(x)$，称为**第二类勒让德函数**。由上述讨论可知，勒让德方程(4.4.3)仅在其参数取为 $k(k+1)$，k 为整数(包括零)的时候，在闭区间[$-1,1$]上才有有界的解。这个有界解就是勒让德多项式 $P_k(x)$(不计常数因子)。

为了应用方便，$P_k(x)$可写成微分形式

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x^2 - 1)^k \tag{4.4.10}$$

式(4.4.10)称为勒让德多项式的罗德利克(Rodrigues)表达式。

事实上，由牛顿二项式定理有

$$(x^2 - 1)^k = \sum_{m=0}^{k} \frac{(-1)^m k!}{m!(k-m)!} x^{2k-2m}$$

于是

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2^k k!}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x^2 - 1)^k \\
&= \frac{1}{2^k k!}\sum_{m=0}^{N} \frac{(-1)^m k!}{m!(k-m)!}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x^{2k-2m}) \\
&= \frac{1}{2^k k!}\sum_{m=0}^{N} \frac{(-1)^m k!}{m!(k-m)!} \\
&\quad \cdot (2k-2m)(2k-2m-1)\cdots(n-2m+1)x^{k-2m} \\
&= \frac{1}{2^k}\sum_{m=0}^{N}(-1)^m \frac{(2k-2m)!}{m!(k-m)!(k-2m)!}x^{k-2m} \\
&= P_k(x)
\end{aligned}$$

其中 N 的意义与式(4.4.9)中的相同。

像贝塞尔函数一样，勒让德多项式也满足一些递推公式，重要的有

$$(k+1)P_{k+1}(x)-(2k+1)xP_k(x)+kP_{k-1}(x)=0 \quad k\geqslant 1 \tag{4.4.11}$$

$$(x^2-1)P'_k(x)=kxP_k(x)-kP_{k-1}(x) \quad k\geqslant 1 \tag{4.4.12}$$

$$kP_k(x)+P'_{k-1}(x)-xP'_k(x)=0 \quad k\geqslant 1 \tag{4.4.13}$$

$$P'_{k+1}(x)=xP'_k(x)+(k+1)P_k(x) \quad k\geqslant 0 \tag{4.4.14}$$

另外两个值得注意的关系式是

$$P_{2k}(-x)=P_{2k}(x) \tag{4.4.15}$$

$$P_{2k+1}(-x)=-P_{2k+1}(x) \tag{4.4.16}$$

即当 $n=2k$ 是偶数时，$P_n(x)$是偶函数；当 $n=2k+1$ 是奇数时，$P_n(x)$是奇函数。

2. 勒让德多项式的正交性与富里埃-勒让德级数

定理 1 勒让德多项式序列$\{P_k(x)\}$，$k=0,1,2,\cdots$在区间$[-1,1]$上是正交的，即

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_k(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0 & m\neq k \quad n,k=0,1,2,\cdots \\ \dfrac{2}{2k+1} & m=k \quad k=0,1,2,\cdots\end{cases} \tag{4.4.17}$$

称$\sqrt{\dfrac{2}{2k+1}}$为 k 阶勒让德多项式的模值。

证：$P_m(x)$与 $P_k(x)$分别满足方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1-x^2)P'_m(x)]+m(m+1)P_m=0 \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1-x^2)P'_k(x)]+k(k+1)P_k=0 \tag{2}$$

用 $P_k(x)$乘式(1)，$P_m(x)$乘式(2)，相减后积分得

$$[m(m+1)-k(k+1)]\int_{-1}^{1}P_m(x)P_k(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^{1}\{P_m(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1-x^2)P'_k(x)$$

$$- P_k(x)\frac{d}{dx}[(1-x^2)P'_m(x)]\}dx$$

$$=[(1-x^2)(P_m(x)P'_k(x)-P_k(x)P'_m(x))]_{-1}^{1}=0$$

因为 $m\neq k$，故

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_k(x)dx=0 \quad m\neq k$$

式(4.4.17)中第一个式子得证。第二个式子不难用数学归纳法证明，此处从略。

定理 2 设函数 $f(x)$在$[-1,1]$上有连续的一阶导数和分段连续的二阶导数，则 $f(x)$可展成如下的绝对一致收敛的级数

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}C_kP_k(x) \tag{4.4.18}$$

其中

$$C_k=\frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_k(x)dx \quad (k=0,1,2,\cdots) \tag{4.4.19}$$

式(4.4.18)右端的级数，称为 $f(x)$的富里埃-勒让德级数。

在数学物理方程中，与勒让德方程(4.4.3)有密切联系的另一个重要方程是连带勒让德方程。

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+[k(k+1)-\frac{m^2}{1-x^2}]y=0 \tag{4.4.19'}$$

其中 m 是整数，$\lambda=k(k+1)$，即式(4.4.1)。现在我们来求这个方程的解。

我们虽然可以用求勒让德方程的解的方法，求缔合勒让德方程的级数解。但是直接运用级数解法所得系数递推公式比较复杂。因此，常常作变换

$$y=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}u(x) \quad |x|<1$$

把待求函数 $y(x)$变换为 $u(x)$。在这种变换下。

$$\frac{dy}{dx}=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}u'-m(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}xu$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}u''-2m(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}xu^1-m(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}u$$

$$+m(m-2)(1-x^2)^{\frac{m}{2}-2}x^2u$$

将以上三个式子代入式(4.4.1)化为$u(x)$的微分方程

$$(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2}-2x(m+1)\frac{du}{dx}$$

$$+[k(k+1)-m(m+1)]u=0 \qquad (4.4.20)$$

这个方程恰好是勒让德方程逐项求导m次的结果。事实上,把勒让德方程

$$(1-x^2)\frac{d^2P}{dx^2}-2x\frac{dP}{dx}+k(k+1)P=0$$

求导m次

$$\frac{d^m}{dx^m}\left[(1-x^2)\frac{d^2P}{dx^2}-\frac{d^m}{dx^m}[2x\frac{dP}{dx}\right]$$

$$+k(k+1)\frac{d^mP}{dx^m}=0$$

而

$$\frac{d^m}{dx^m}\left[(1-x^2)\frac{d^2P}{dx^2}\right]=\frac{d^{m+2}P}{dx^{m+2}}(1-x^2)-\frac{m}{1!}\frac{d^{m+1}P}{dx^{m+1}}$$

$$\cdot 2x-\frac{m(m-1)}{2!}\frac{d^mP}{dx^m}\cdot 2$$

$$\frac{d^m}{dx^m}\left[2x\frac{dP}{dx}\right]=\frac{d^{m+1}P}{dx^{m+1}}\cdot 2x+\frac{m}{1!}\frac{d^mP}{dx^m}\cdot 2$$

令$u=\frac{d^mP}{dx^m}$,则式(4.4.20)可化为

$$(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2}-2x(m+1)\frac{du}{dx}$$

$$+[k(k+1)-m(m+1)]u=0$$

即

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{d^mP}{dx^m}\right]-2x(m+1)\frac{d}{dx}\left[\frac{d^mP}{dx^m}\right]$$

$$+[k(k+1)-m(m+1)]\frac{\mathrm{d}^m P}{\mathrm{d}x^m}=0$$

因此，方程式(4.4.20)的解 $u(x)$ 应当是勒让方程的解 $P(x)$ 的 m 阶导数，即

$$u(x)=\frac{\mathrm{d}^m P}{\mathrm{d}x^m}$$

所以缔合勒让德方程(4.4.1)的通解是

$$\begin{aligned}y(x)&=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}[AP_k(x)+BQ_k(x)]\\&=A(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^m P_k(x)}{\mathrm{d}x^m}+B(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^m Q_k(x)}{\mathrm{d}x^m}\end{aligned}$$

记 $P_k^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\dfrac{\mathrm{d}^m P_k(x)}{\mathrm{d}x^m}\quad Q_k^m=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\dfrac{\mathrm{d}^m Q_k(x)}{\mathrm{d}x^m}$

则

$$y(x)=AP_k^m(x)+BQ_k^m(x)\tag{4.4.21}$$

并称 $P_k^m(x)$、$Q_k^m(x)$ 为**第一、第二类连带勒让德函数**。显然有

$$P_k^0(x)=P_k(x)\qquad Q_k^0(x)=Q_k(x)$$

当 $m>k$ 时，$P_k^m(x)$ 等于零。前面几个第一类连带勒让德函数是

$$P_1^1(x)=(1-x^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$P_2^1(x)=3x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$P_2^2(x)=3(1-x^2)$$

由斯图姆——刘维尔理论知，连带的勒让德多项式列 $\{P_k^m(x)\}(k=0,1,2,\cdots)$ 在区间 $[-1\quad 1]$ 上也构成正交完备系，其正交性与它们的模可用下式表示

$$\int_{-1}^{1}P_k^m(x)P_n^m(x)\mathrm{d}x=\frac{2(k+m)!}{(2k+1)(k-m)!}\delta_{kn}\tag{4.4.22}$$

其中

$$\delta_{kn}=\begin{cases}1 & \text{当 } k=n\\0 & \text{当 } k\neq n\end{cases}$$

最后我们指出，$P_k^m(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上是处处有限的，而

$Q_k^m(x)$在端点 $x=\pm1$ 处是无穷的。利用式(4.4.22)与$\{P_k^m(x)\}$($k=0,1,2,\cdots$)的正交完备性，就可将一个在$[-1,1]$上满足按固有函数系展开条件的函数 $f(x)$展成如下形式的级数

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}C_kP_k^m(x)$$

其中

$$C_k=\frac{(2k+1)(k-m)!}{2(k+m)!}\int_{-1}^{1}f(x)P_k^m(x)\mathrm{d}x$$

若令 $x=\cos\theta$，则上面两式可写成

$$f(\cos\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}C_kP_k^m(\cos\theta)$$

$$C_k=\frac{(2k+1)(k-m)!}{2(k+m)!}\int_0^{\pi}f(\cos\theta)P_k^m(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

例 9 将函数 $f(x)=|x|$在区间$(-1\quad 1)$内展成勒让德多项式的级数形式。

解： 由公式(4.4.19)有

$$\begin{aligned}C_k&=\frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{0}-xP_k(x)\mathrm{d}x+\int_0^1xP_k(x)\mathrm{d}x\\&=\frac{2k+1}{2}\left(\int_0^1xP_k(-x)\mathrm{d}x+\int_0^1xP_k(x)\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

当 k 为偶数时，$P_k(x)$是偶函数，即

$$P_x(-x)=P_k(x),\ C_k=(2k+1)\int_0^1xP_k(x)\mathrm{d}x$$

即

$$C_{2n}=(4n+1)\int_0^1xP_{2n}(x)\mathrm{d}x\quad n=0,1,2,\cdots$$

故

$$C_0=\int_0^1x\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$$

$$C_2=5\int_0^1x\cdot\frac{1}{2}(3x^2-1)\mathrm{d}x=\frac{5}{8}$$

$$C_4 = 9\int_0^1 x \cdot \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)\mathrm{d}x = -\frac{3}{2^4}$$

当 k 为奇数时，$P_k(x)$是奇函数，所以 $C_{2n+1}=0$，($n=0,1,2,\cdots$)，故而得展开式

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{5}{8}P_2 - \frac{3}{2^4}P_4 + \cdots$$

例 10 证明 $P_k(x)=\frac{1}{2k+1}[P'_{k+1}(x)-P'_{k-1}(x)]$

证：

$$P'_{k+1} = \frac{1}{2^{k+1}(k+1)!}\frac{\mathrm{d}^{k+2}}{\mathrm{d}x^{k+2}}(x^2-1)^{k+1}$$

$$= \frac{1}{2^{k+1}(k+1)!}\frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}x^{k+1}}\left[\frac{\mathrm{d}(x^2-1)^{k+1}}{\mathrm{d}x}\right]$$

$$= \frac{1}{2^k k!}\frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}x^{k+1}}[x(x^2-1)^k]$$

$$= \frac{1}{2^k k!}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}[(x^2-1)^k + 2kx^2(x^2-1)^{k-1}]$$

$$= P_k(x) + \frac{1}{2^{k-1}(k-1)!}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}[x^2(x^2-1)^{k-1}]$$

$$= P_k(x) + \frac{1}{2^{k-1}(k-1)!}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}[(x^2-1)^k + (x^2-1)^{k-1}]$$

$$= P_k(x) + 2kP_k(x) + \frac{1}{2^{k-1}(k-1)!}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x^2-1)^{k-1}$$

$$= (2k+1)P_k(x) + P'_{k-1}(x)$$

故有

$$P_k(x) = \frac{1}{2k+1}[P'_{k-1}(x) - P'_{k-1}(x)]$$

例 11 求证勒让德多项式的递推公式

$$(k+1)P_{k+1}(x) - (2k+1)xP_k(x) + kP_{k-1}(x) = 0 \tag{4.4.23}$$

证：先将函数 $xP_k(x)$展成勒让德多项式的级数。设

$$xP_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x)$$

其中

$$C_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_k(x)\mathrm{d}x$$

因为 $xP_k(x)$是 $k+1$ 次多项式，故当 $n>k+1$ 时，$C_n=0$ 使用分部积分可得

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_k(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{2n+1}{2}\cdot\frac{1}{2^k k!}\int_{-1}^{1} xP_n(x)\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x^2-1)^k\mathrm{d}x \\ &= (-1)^k\frac{2n+1}{2^{k+1}k!}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^k\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}[xP_n(x)]\mathrm{d}x \end{aligned}$$

当 $n<k-1$ 时，$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}[xP_n(x)]\equiv 0$，由此可知

$$C_{k-2} = C_{k-3} = \cdots = C_0 = 0$$

由于 $xP_k^2(x)$是 x 的奇函数，所以

$$C_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} xP_k^2(x)\mathrm{d}x = 0$$

由此可见，$xP_k(x)$的展开式中只剩下了两项

$$xP_k(x) = C_{k+1}P_{k+1}(x) + C_{k-1}P_{k-1}(x) \qquad (4.4.24)$$

现在计算系数 C_{k+1}与 C_{k-1}。

由于 $P_k(x)$的最高次项的系数为$\frac{(2k)!}{2^k(k!)^2}$，比较式(4.4.24)两端最高次项的系数得

$$\frac{(2k)!}{2^k(k!)^2} = C_{k+1}\frac{(2k+2)!}{2^{k+1}[(k+1)!]^2}$$

从而得到

$$C_{k+1} = \frac{k+1}{2k+1}$$

在式(4.4.24)中，令 $x=1$，由于 $P_k(1)=1$，故有

$$1 = C_{k+1} + C_{k-1}$$

即

$$C_{k-1}=1-C_{k+1}=1-\frac{k+1}{2k+1}=\frac{k}{2k+1}$$

将 C_{k+1},C_{k-1}代入式(4.4.24)即得

$$xP_k(x)=\frac{k+1}{2k+1}P_{k+1}(x)+\frac{k}{2k+1}P_{k-1}(x)$$

递推公式至此得证。

§4.5 勒让德函数的应用举例

本节将通过具体例子,说明勒让德多项式在用分离变量法求解定解问题中的应用。

例 12 试求以 1 为半径的球体的定常温度分布。假定在球面上的温度分布保持为

$$u|_{\rho=1}=\cos^2\theta$$

解:问题归结为

$$\begin{cases}\Delta u=0 \quad 0<\rho<1\\ u|_{\rho=1}=\cos^2\theta\end{cases}$$

由于方程的自由项及定解条件中的已知函数,都与变量 φ 无关,采用球坐标,定解问题化为

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\dfrac{1}{\rho^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right)=0 \quad 0<\rho<1 & (4.5.1)\\ u|_{\rho=1}=\cos^2\theta & (4.5.2)\end{cases}$$

令 $u(\rho,\theta)=R(\rho)\Phi(\theta)$,代入泛定方程得

$$[\rho^2R''(\rho)+2\rho R'(\rho)]\Theta(\theta)+[\Theta''(\theta)+\mathrm{ctg}\theta\Theta'(\theta)]R(\rho)=0$$

即

$$\frac{\rho^2R''(\rho)+2\rho R'(\rho)}{R(\rho)}=-\frac{\Theta''(\theta)+\mathrm{ctg}\theta\Theta'(\theta)}{\Theta(\theta)}=\lambda$$

由于对任何实数 λ,二次方程 $k^2+k-\lambda=0$ 至少被 k 的一个值(可能是复值)所满足,故总可取 $\lambda=k(k+1)$,从而得到

$$\rho^2 R''(\rho) + 2\rho R'(\rho) - k(k+1)R(\rho) = 0 \quad (4.5.3)$$

$$\Theta''(\theta) + \mathrm{ctg}\theta\Theta'(\theta) + k(k+1)\Theta(\theta) = 0 \quad (4.5.4)$$

令 $x=\cos\theta(-1\leqslant x\leqslant 1)$，并将 $\Theta(\theta)$ 改记成 $y(x)$，则式(4.5.4)化为

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + k(k+1)y = 0 \quad (4.5.5)$$

这是勒让德方程，其通解为

$$y(x) = AP_k(x) + BQ_k(x)$$

即方程(4.5.4)的通解是

$$\Theta(\theta) = AP_k(\cos\theta) + BQ_k(\cos\theta)$$

由问题的物理意义知，函数 $u(\rho,\theta)$ 应是有界的，从而 $\Theta(\theta)$ 亦应有界，由§4.4节的结论可知，只有当 k 为整数时，方程(4.5.4)在区间$[0,\pi]$内才有有界解 $\Theta(\theta)=P_k(\cos\theta)$，其中 $P_k(\cos\theta)(k=0,1,2,\cdots)$就是式(4.5.4)在自然边界条件 $|\Theta(0)|<+\infty$，$|\Theta(\pi)|<+\infty$ 下的固有函数系，或者说 $P_k(x)(k=0,1,2,\cdots)$就是方程(4.5.5)在自然边界条件 $|y(\pm 1)|<+\infty$ 下的固有函数系。因为 $k(x)=1-x^2$ 在 $x=\pm$ 处为零，所以在这两点应加自然边界条件。

方程(4.5.3)是欧拉(Euler)方程，其通解是

$$R_k(\rho) = A_k\rho^k + B_k\rho^{-(k+1)}$$

由于 $u(\rho,\theta)$ 有界，故 $R_k(\rho)$ 也应有界，所以 $B_k=0$，即

$$R_k(\rho) = A_k\rho^k,$$

由迭加原理，原问题的解可设为

$$u(\rho,\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k\rho^k P_k(\cos\theta) \quad (4.5.6)$$

由边界条件式(4.5.2)得

$$\cos^2\theta = \sum_{k=0}^{\infty} A_k P_k(\cos\theta) \quad (4.5.7)$$

在式(4.5.7)中令 $\cos\theta=x$，则得

$$x^2 = \sum_{k=0}^{\infty} A_k P_k(x),$$

因为

$$x^2 \equiv \frac{1}{3}P_0(x) + \frac{2}{3}P_2(x)$$

比较这两式的右端有

$$A_0 = \frac{1}{3}, A_2 = \frac{2}{3}, A_k = 0 \quad k \neq 2$$

因此，所求定解问题的解是

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}P_2(\cos\theta)\rho^2$$

$$= \frac{1}{3} + \left(\cos^2\theta - \frac{1}{3}\right)\rho^2$$

注 式(4.5.7)中的系数也可用公式

$$A_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_k(x)\mathrm{d}x \quad (k = 0,1,2,\cdots)$$

来计算。

习 题 四

1. 确定下列正则斯图姆-刘维尔问题的固有值和固有函数($\lambda > 0$)

(1) $\begin{cases} u'' + \lambda u = 0 \\ u(0) = 0,\ u(\pi) = 0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} u'' + \lambda u = 0 \\ u'(0) = 0,\ u'(\pi) = 0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} u'' + \lambda u = 0 \\ u(0) + u'(0) = 0,\ u(1) = 0 \end{cases}$

2. 求下列周期斯图姆-刘维尔问题的固有值和固有函数

(1) $\begin{cases} u'' + \lambda u = 0 \\ u(-1) = u(1) \quad u'(-1) = u'(1) \end{cases}$

(2) $\begin{cases} u'' + \lambda u = 0 \\ u(0) = u(2\pi) \quad u'(0) = u'(2\pi) \end{cases}$

3. 求下列斯图姆-刘维尔问题的固有值与固有函数

(1) $\begin{cases} u'' + u' + (1 + \lambda)u = 0 \\ u(0) = 0 \quad u(1) = 0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} u'' + 2u' + (1+\lambda)u = 0 \\ u(0) = 0 \quad u'(1) = 0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} u'' - 3u' + 3(1+\lambda)u = 0 \\ u'(0) = 0 \quad u'(\pi) = 0 \end{cases}$

4. 求下列正则斯图姆-刘维尔问题的固有值和固有函数

(1) $\begin{cases} x^2u'' + 3xu' + \lambda u = 0 \quad 1 < x < \mathrm{e} \\ u(1) = 0, \quad u(\mathrm{e}) = 0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(2+x)^2u'] + \lambda u = 0 \quad -1 < x < 1 \\ u(-1) = 0 \quad u(1) = 0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} (1+x)^2u'' + 2(1+x)u' + 3\lambda u = 0 \quad 0 < x < 1 \\ u(0) = 0 \quad u(1) = 0 \end{cases}$

5. (1)将函数 $f(x)=\sin x \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$ 按下列斯图姆-刘维尔问题

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0 \\ u(0) = 0, u(\pi) + u'(\pi) = 0 \end{cases}$$

的固有函数系展开。

(2)求函数 $f(x)=x \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

按下列斯图姆-刘维尔问题

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0 \\ u'(0) = 0, u'(\pi) = 0 \end{cases}$$

的固有函数系展开的级数展开式。

6. 设 $\mu_i (i=1,2,3,\cdots)$ 是 $J_0(x)=0$ 的正根，将函数 $f(x)=x^2$ 展成贝塞尔函数 $J_0(\mu_i x)$ 的级数。

7. 设 $\mu_i (i=1,2,3,\cdots)$ 是方程 $J_0(2x)=0$ 的正根，将函数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ \dfrac{1}{2} & x = 1 \\ 0 & 1 < x < 2 \end{cases}$$

展成贝塞尔函数 $J_0(\mu_i x)$ 的级数。

8. 证明

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\frac{1}{x}\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$J_{\frac{5}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\left(1-\frac{3}{x^2}\right)\sin(x-\pi)+\frac{3}{x}\cos(x-\pi)\right]$$

9. 证明 $y=J_k(\alpha x)$是方程

$$x^2y''+xy'+(\alpha^2x^2-k^2)y=0$$

的解。

10. 若 $\mu_i(i=1,2,3,\cdots)$是 $J_1(x)$的正零点，证明

$$\int_0^R xJ_0\left(\frac{\mu_i}{R}x\right)J_0\left(\frac{\mu_j}{R}x\right)\mathrm{d}x=\begin{cases}0 & i\neq j\\ \frac{R^2}{2}J_0^2(\mu_i) & i=j\end{cases}$$

11. 若 $f(x)=\begin{cases}0 & -1<x\leqslant 0\\ 1 & 0<x<1\end{cases}$

证明

$$f(x)=\frac{1}{4}P_0(x)+\frac{1}{2}P_1(x)+\frac{5}{16}P_2(x)-\frac{3}{32}P_4(x)+\cdots$$

12. 证明

$$P_k(1)=1,\ P_k(-1)=(-1)^k$$

$$P_{2k-1}(0)=0,\ P_{2k}(0)=\frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}$$

13. 证明

$$P_k'(x)=(2k-1)P_{k-1}(x)+(2k-5)P_{k-3}(x)+(2k-9)P_{k-5}(x)+\cdots$$

14. 求解球域内的下列定解问题

$$\begin{cases}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0,\ x^2+y^2+z^2<1\\ u(\rho,\theta,\varphi)|_{\rho=1}=3\cos2\theta+1\end{cases}$$

15. 设有一单位球，其边界球面上温度分布为（如图 4-4）

$$u|_{\rho=1}=\begin{cases}A & 0\leqslant\theta\leqslant\alpha\\ 0 & \alpha<\theta\leqslant\pi\end{cases}$$

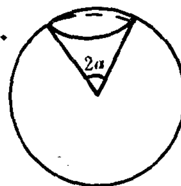


图 4-4

16. 求解下列定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \rho}\right) \\ u|_{t=0} = 1 - \dfrac{\rho^2}{R^2},\ \dfrac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0 \\ u|_{\rho=0} < \infty,\ u|_{\rho=R} = 0 \end{cases}$$

17. 设有半径为 R，高为 h 的圆柱体，下底和侧面的温度保持为零度，上底温度分布为 $f(\rho)=\rho^2$，其中 ρ 为底圆上任一点的极径，求柱体内稳定温度分布。

第五章　边值问题

在前几章讨论了初值问题和混合问题，本章将研讨边值问题。所谓边值问题，从数学上讲就是要找出一个满足已知偏微分方程和特定边界条件的函数；从物理角度说，该问题与时间无关，它仅含有空间坐标。我们已经知道：初值问题常与双曲型方程相联系，而边值问题却常与椭圆型偏微分方程相联系。和解初值问题比较，解边值问题比较困难，这是由于物理上要求边值问题的解，必须在全部定义域上获得。而初值问题是在局部范围内的解，例如在很短时间内的解，也是有物理意义的。

在本章中，我们不讨论一般的椭圆型偏微分方程，侧重讨论二维的情形。

§5.1　边值问题的提法

一些著名的椭圆型方程是

拉普拉斯(Laplace)**方程**(又称**调和方程**)

$$\Delta u = 0 \tag{5.1.1}$$

泊松(Poisson)**方程**

$$\Delta u = f(x) \tag{5.1.2}$$

亥姆霍兹(Helmholtz)**方程**

$$\Delta u + \lambda u = 0 \ (\text{常数 } \lambda > 0) \tag{5.1.3}$$

定态薛定谔(Schrödinger)**方程**

$$\Delta u + [\lambda - q(x)]u = 0 \tag{5.1.4}$$

首先，我们定义**调和函数**：如果一个函数与它的一阶和二阶导数都在区域 D 内连续，而且它在 D 内满足拉普拉斯方程，那么，这

个函数就称为是区域 D 内的调和函数。

由于拉普拉斯方程是线性齐次方程，所以调和函数的线性组合也是调和函数。

我们将边值问题分成四类，在本章中主要讨论第一、第二边值问题。

1. 第一边值问题

狄利克莱(Dirichlet)**问题**：求一个函数 $u(x,y,z)$，它在区域 Ω 内调和，在 $\bar{\Omega}=\Omega+\Gamma$ 上连续且满足

$$u(x,y,z)|_{\Gamma} = f(x,y,z) \qquad (5.1.5)$$

其中 $f(x,y,z)$ 是在 Ω 的边界 Γ 上给定的连续函数，Γ 分片光滑。

为了能具体形象地理解这个问题，我们将狄利克莱问题的解 u 在物理上解释为：在一内部不含热源和热汇，在所有边界点具有给定的温度的物体，处于稳定状态时物体内部温度的分布。

2. 第二边值问题

牛曼(Neumann)**问题**：求在 Ω 内调和，在 $\bar{\Omega}=\Omega+\Gamma$ 上连续的函数 $u(x,y,z)$。且满足

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = f(x,y,z) \qquad (5.1.6)$$

符号 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 表示 u 在边界 Γ 上的外法向导数，Γ 分片光滑。

这时解 u 可解释为：当通过物体边界的热流量给定时，在不含热源和热汇的物体内处在稳定状态下的温度分布。

3. 第三边值问题

混杂问题：求在区域 Ω 内调和，在闭区域 $\bar{\Omega}=\Omega+\Gamma$ 上连续的函数 $u(x,y,z)$，且在 Γ 上满足

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right]_{\Gamma} = 0 \qquad (5.1.7)$$

其中 $h>0$。

在这个问题中，解 u 可以解释为：在一个不含热源和热汇的物体内稳定状态的温度分布，在物体边界 Γ 上，热量可自由地散发到温度为零度的周围介质中去。

4. 第四边值问题

洛平(Robin)问题：求在区域 Ω 内调和，在 $\bar{\Omega}=\Omega+\Gamma$ 上连续的函数 $u(x,y,z)$，它在边界 Γ 的不同部分上满足不同类型的边界条件，例如含如下的边界条件

$$u|_{\Gamma_1}=f_1,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_2}=f_2 \tag{5.1.8}$$

其中 $\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$。

这时解 u 可解释为物体内部的稳定温度场，在物体的边界 Γ_1 上保持给定的温度 f_1，而在 Γ_2 上保持给定的热流量 f_2。

边值问题 1 至 4 称为**内边值问题**。在实际应用中，我们还经常会遇到另一种 边值问题的提法。例如在流体力学的绕流问题中，常需确定某有界区域 Ω 外的流速场。如果流速场是有势的且流体不可压缩，则速度势 φ 在 Ω 外部满足拉普拉斯方程，在绕流物体的边界 Γ 上应有 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0$，其中 n 是物体界面 Γ 的外法向量，因此，确定 Ω 外部流速场的问题，就归结为求一个在曲面 Γ 外部是调和函数，使它在界面 Γ 上满足所给条件(图 5-1)。

由于区域 Ω 有界，故它的外部区域 Ω' 是一个无界区域。因此，外问题是在无界区域上给出的定解问题。这种内边值问题与外边值问题在下列两个方面是不同的。

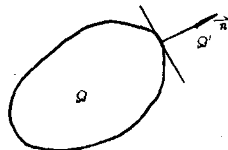


图 5-1

(1) 无穷远可看作是外问题的边界的一部分，但无穷远边界

不同于普通边界。

(2) 在无穷远处，外问题必须满足一个附加条件，否则外问题的解并不唯一，例如，考察以原点为球心的单位球面 Γ 作为边界曲面的狄利克莱外问题，给出边界条件

$$u|_{\Gamma} = 1$$

不难验证，$u_1(x,y,z)\equiv 1$ 及 $u_2(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 都是此定解问题的解，它们都在单位球外满足拉普拉斯方程，且在单位球面 Γ 上满足上述边界条件。那么，在无穷远处应该附加以怎样的限制呢？在电学中，常常假定在无穷远处的电位为零。所以，在外问题中，常要求解在无穷远处的极限为零，即

$$\lim_{\rho\to 0} u(x,y,z) = 0 \quad (\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}) \qquad (5.1.9)$$

对于二维拉普拉斯方程，外问题附加在无穷远点的条件应改为

$$\text{当 } \rho\to\infty \text{ 时，} |u(x,y)| \text{ 有界} \qquad (5.1.10)$$

5. 狄利克莱外问题

在三维空间中的某一有界区域 Ω 的边界 Γ 上给定一连续函数 f，求一函数 $u(x,y,z)$，它在 Ω 的外部 Ω' 内调和，在 $\Omega'+\Gamma$ 上连续，且在边界 Γ 上满足

$$u|_{\Gamma} = f$$

当点 $(x,y,z)\to\infty$ 时，$u(x,y,z)$ 满足条件式(5.1.9)。

6. 牛曼外问题

在三维空间的某一闭光滑曲面 Γ 上给定连续函数 f，求一函数 $u(x,y,z)$，它在闭曲面 Γ 的外部区域 Ω' 内调和，在 $\Omega'+\Gamma$ 上连续且在边界 Γ 上满足

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n'}\right|_{\Gamma} = f$$

其中 n' 是曲面 Γ 的内法向向量，当 $(x,y,z)\to\infty$ 时，$u(x,y,z)$ 满足

条件式(5.1.9)。

对于二维拉普拉斯方程外问题,只需将条件式(5.1.9)改换成式(5.1.10),可类似地提出。

本书重点讨论内问题。但所用的方法也可用来讨论外问题。对泊松方程(5.1.2)的边值问题的提法,与拉普拉斯方程边值问题的提法雷同。由于泊松方程是与拉普拉斯方程对应的非齐次方程,所以,只要找出泊松方程的一个特解,由迭加原理,就能化为拉普拉斯方程的边值问题。所以我们今后主要考虑拉普拉斯方程的边值问题。

§5.2 边值问题的解法

1. 圆域的狄利克莱问题、泊松积分公式

在极坐标系下,这个定解问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad 0 \leqslant \rho \leqslant a & (5.2.1) \\ u|_{\rho=a} = f(\theta) \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi & (5.2.2) \end{cases}$$

其中 a 为圆的半径。

作为一个边值问题,在圆域的其它三条边上应当提适当的条件。由于在 $\theta=0$ 和 $\theta=2\pi$ 上函数 $u(\rho,\varphi)$ 应保单值,所以 $u(\rho,\varphi)$ 关于 θ 应满足以 2π 为周期的条件

$$u(\rho,0) = u(\rho,2\pi) \quad (0 < \rho < a) \qquad (5.2.3)$$

$$\frac{\partial u(\rho,0)}{\partial \theta} = \frac{\partial u(\rho,2\pi)}{\partial \theta} \qquad (5.2.4)$$

又因 $u(\rho,\theta)$ 在圆内要求二次可微,因此 $u(\rho,\theta)$ 在 $\rho=0$ 必需是有限的,即

$$|u(0,\theta)| < +\infty \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi) \qquad (5.2.5)$$

于是圆域内的 Dirichlet 问题完整提法为式(5.2.1)~式(5.2.5)。

用分离变量法求形如

$$u(\rho,\theta) = R(\rho)\Theta(\theta)$$

的非零解，代入泛定方程(5.2.1)和边界条件式(5.2.3)、式(5.2.4)、式(5.2.5)得

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = \theta & (5.2.6) \\ \Theta(0) = \Theta(2\pi),\ \Theta'(0) = \Theta'(2\pi) & (5.2.7) \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} \rho^2 R'' + \rho R' - \lambda R = 0 & (5.2.8) \\ |R(0)| < \infty & (5.2.9) \end{cases}$$

解固有值问题式(5.2.6)、式(5.2.7)得固有值

$$\lambda_k = k^2 \quad (k = 0,1,2,\cdots) \tag{5.2.10}$$

对应的固有函数是

$$\Theta_k(\theta) = C_k\cos k\theta + D_k\sin k\theta \tag{5.2.11}$$

将 $\lambda_k = k^2$ 代入式(5.2.8)得

$$\rho^2 R'' + \rho R' - k^2 R = 0$$

解得

$$R_0(\rho) = A_0 + B_0\ln\rho \tag{5.2.12}$$

$$R_k(\rho) = A_k\rho^k + B_k\rho^{-k} \tag{5.2.13}$$

由条件式(5.2.9)知式(5.2.12)和(5.2.13)中的 B_0 和 B_k 应取为零。于是我们得满足泛定方程的

$$u_0(\rho,\theta) = R_0(\rho)\Theta_0(\theta) = \frac{1}{2}a_0$$

$$\begin{aligned} u_k(\rho,\theta) &= R_k(\rho)\Theta_k(\theta) \\ &= \rho^k(a_k\cos k\theta + b_k\sin k\theta) \quad (k = 1,2,3,\cdots) \end{aligned}$$

利用迭加原理得满足泛定方程的形式解

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\rho^k(a_k\cos k\theta + b_k\sin k\theta) \tag{5.2.14}$$

由边值条件式(5.2.2)得

$$f(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}a^k(a_k\cos k\theta + b_k\sin k\theta)$$

由于 $f(\theta)$ 是以 2π 为周期的函数，故有

$$a_k = \frac{1}{\pi a^k}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos k\theta \mathrm{d}\theta \quad (k = 0,1,2,\cdots) \tag{5.2.15}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi a^k}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin k\theta \mathrm{d}\theta \quad (k = 1,2,3,\cdots) \tag{5.2.16}$$

将它们代入式(5.2.14)就得到式(5.2.1)～式(5.2.5)的形式解。

现在我们来导出泊松积分公式。

将富里埃系数代入式(5.2.14)得

$$\begin{aligned} u(\rho,\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\mathrm{d}\theta \\ &\quad + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^k\int_0^{2\pi} f(\tau)[\cos k\tau\cos k\theta + \sin k\tau\sin k\theta]\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^k\cos k(\theta - \tau)]f(\tau)\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

当 $0\leqslant\rho_0<a$ 时，由欧拉公式有

$$\begin{aligned} &1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^k\cos k(\theta - \tau) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{\rho}{a}\right)^k \mathrm{e}^{ik(\theta-\tau)} + \left(\frac{\rho}{a}\right)^k \mathrm{e}^{-ik(\theta-\tau)}\right] \\ &= 1 + \frac{\frac{\rho}{a}\mathrm{e}^{i(\theta-\tau)}}{1 - \frac{\rho}{a}\mathrm{e}^{i(\theta-\tau)}} + \frac{\frac{\rho}{a}\mathrm{e}^{-i(\theta-\tau)}}{1 - \frac{\rho}{a}\mathrm{e}^{-i(\theta-\tau)}} \\ &= \frac{a^2 - \rho^2}{a^2 - 2a\rho\cos(\theta - \tau) + \rho^2} \end{aligned}$$

所以

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^2 - \rho^2}{a^2 - 2a\rho\cos(\theta - \tau) + \rho^2}f(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{5.2.17}$$

上式右端的积分称为**圆的泊松**(Poisson)**积分**，式(5.2.17)称为**泊松公式。**

当 $\rho=0$ 时，泊松积分公式化为

$$u(0,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (5.2.18)$$

这个结果可以表述为如下定理。

调和函数的平均值定理：如果 u 是圆内的调和函数，则 u 在圆心的值等于它在圆周上的值的平均值。

对于圆的狄利克莱外问题，类似如上所述不难解决。对于外问题，当 $\rho\to\infty$ 时，u 必须是有界的。形式解为

$$u(\rho,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{-k}(a_k\cos k\theta + b_k\sin k\theta) \quad (5.2.19)$$

由边界条件 $u(a,\theta)=f(\theta)$ 得

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a^{-k}(a_k\cos k\theta + b_k\sin k\theta)$$

所以

$$a_k = \frac{1}{\pi a^k}\int_0^{2\pi} f(\tau)\cos k\tau\mathrm{d}\tau \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi a^k}\int_0^{2\pi} f(\tau)\sin k\tau\mathrm{d}\tau \quad (k=1,2,3,\cdots)$$

把 a_k、b_k 代入式(5.2.19)得

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a}{\rho}\right)^k \cos k(\theta-\tau)\right] f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

由此可见，只需将圆的狄利克莱内问题形式解中的$\frac{\rho}{a}$换成$\frac{a}{\rho}$，就得到了圆的狄利克莱外问题的形式解，所以

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - a^2}{a^2 - 2a\rho\cos(\theta-\tau) + \rho^2} f(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (5.2.20)$$

2. 圆环域的狄利克莱问题

圆的狄利克莱问题的自然推广是圆环的狄利克莱问题，即

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \rho_2 < \rho < \rho_1 & (5.2.21) \\ u(\rho_1, \theta) = f(\theta) & (5.2.22) \\ u(\rho_2, \theta) = g(\theta) \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi & (5.2.23) \end{cases}$$

此外，由于$u(\rho,\theta)$必须满足周期条件，相应地，$f(\theta)$与$g(\theta)$也必须是以2π为周期的函数。

类似于求解圆的狄利克莱问题，用分离量法得相应常微分方程的固有值问题。

当$\lambda=0$时，有

$$u(\rho,\theta) = (A + B\ln\rho)(C\theta + D)$$

由于$u(\rho,\theta)$满足周期性条件，必须$C=0$。故有

$$u_0(\rho,\theta) = \frac{a_0}{2} + \frac{b_0}{2}\ln\rho$$

其中$a_0=2AD, b_0=2BD$。

当$\lambda>0$时，得固有值$\lambda=k^2 \quad (k=1,2,3,\cdots)$于是有

$$u_k(\rho,\theta) = (C_k\rho^k + D_k\rho^{-k})(A_k\cos k\theta + B_k\sin k\theta)$$

利用迭加原理，方程式(5.2.21)的形式解是

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{2}(a_0 + b_0\ln\rho) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[(a_k\rho^k + b_k\rho^{-k})\cos k\theta + (C_k\rho^k + \mathrm{d}_k\rho^{-k})\sin k\theta\right] \tag{5.2.24}$$

由边值条件式(5.2.22)、式(5.2.23)求得系数为

$$\begin{cases} a_0 + b_0\ln\rho_1 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\tau)\mathrm{d}\tau \\ a_k\rho_1^k + b_k\rho_1^{-k} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\tau)\cos k\tau\mathrm{d}\tau \\ C_k\rho_1^k + \mathrm{d}_k\rho_1^{-k} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\tau)\sin k\tau\mathrm{d}\tau \end{cases} \tag{5.2.25}$$

$$
\begin{cases}
a_0 + b_0 \ln \rho_2 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g(\tau)\mathrm{d}\tau \\
a_k \rho_2^k + b_k \rho_2^{-k} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g(\tau)\cos k\tau \mathrm{d}\tau \\
C_k \rho_2^k + \mathrm{d}_k \rho_2^{-k} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g(\tau)\sin k\tau \mathrm{d}\tau
\end{cases}
\tag{5.2.26}
$$

于是可以确定出常数 a_0, b_0, a_k, b_k, c_k 和 d_k，将他们代入式(5.2.24)就得到圆环的狄利克莱问题的解。

3. 圆域的牛曼问题

考察牛曼内问题

$$
\begin{cases}
\Delta u = 0 \quad \rho < R & (5.2.27) \\
\dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial u}{\partial \rho}\Big|_{\rho=R} = f(\theta) \quad \rho = R & (5.2.28)
\end{cases}
$$

在第六章中将证明，牛曼内问题有解的必要条件是

$$
R\int_0^{2\pi} f(\theta)\mathrm{d}\theta = 0
$$

与圆域的狄利克莱内问题一样，可得拉普拉斯方程式(5.2.27)的形式解

$$
u(\rho,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) \tag{5.2.29}
$$

将上式两边对 ρ 微分并利用边界条件式(5.2.28)得

$$
\frac{\partial u(\rho,\theta)}{\partial \rho}\Big|_{\rho=R} = \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^{k-1}(a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) = f(\theta) \tag{5.2.30}
$$

由此知系数为

$$
\begin{cases}
a_k = \dfrac{1}{k\pi R^{k-1}}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\tau)\cos k\tau \mathrm{d}\tau \quad (k = 1,2,3,\cdots) & (5.2.31) \\
b_k = \dfrac{1}{k\pi R^{k-1}}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\tau)\sin k\tau \mathrm{d}\tau \quad (k = 1,2,3,\cdots) & (5.2.32)
\end{cases}
$$

应该指出，$f(\theta)$ 得以展开成级数式(5.2.30)，是由于有相容性条

件

$$\int_0^{2\pi} f(\tau)\mathrm{d}\tau = 0$$

把式(5.2.31)、式(5.2.32)代入式(5.2.29)得

$$u(\rho,\theta) = \frac{a_0}{2} + \frac{R}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{\rho}{R}\right)^k \cos k(\theta-\tau)\right]f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

利用恒等式

$$-\frac{1}{2}\ln[1 + r^2 - 2r\cos(\theta-\tau)] = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}r^k\cos(\theta-\tau)$$

取 $\gamma=\dfrac{\rho}{R}$，则得解为

$$u(\rho,\theta) = \frac{a_0}{2} - \frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln[R^2 - 2R\rho\cos(\theta-\tau) + \rho^2]f(\tau)\mathrm{d}\tau \quad \rho < R \tag{5.2.33}$$

用类似的方法，容易求得牛曼外问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \qquad \rho > R & (5.2.34) \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = -\dfrac{\partial u}{\partial \rho} = \rho(\theta) \quad \rho = R & (5.2.35) \end{cases}$$

的解为

$$u(\rho,\theta) = \frac{a_0}{2} + \frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln[R^2 - 2R\rho\cos(\theta-\tau) + \rho^2]f(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{5.2.36}$$

4. 矩形域的狄利克莱问题

先考察仅有一条边具有非齐次边界条件的情形，即

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0,\ 0 < x < a \quad 0 < y < b & (5.2.37) \\ u(x,0) = f(x) & (5.2.38) \\ u(x,b) = 0 & (5.2.39) \\ u(0,y) = 0 & (5.2.40) \\ u(a,y) = 0 & (5.2.41) \end{cases}$$

用分离变量法，寻求形如

$$u(x,y) = X(x)Y(y) \tag{5.2.42}$$

的解。将式(5.2.42)代入式(5.2.37)得

$$X'' - \lambda X = 0 \tag{5.2.43}$$

$$Y'' + \lambda Y = 0 \tag{5.2.44}$$

其中 λ 为常数。

因为在 $x=0$ 和 $x=a$ 处的边界条件都是齐次的，为得固有值问题的非零解，应选取 $\lambda=-\beta^2, \beta>0$。

不难求得固有值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \beta^2 X(x) = 0 \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases}$$

的固有值是

$$\beta = \frac{k\pi}{a} \quad (k = 1,2,3,\cdots)$$

相应的固有函数是 $\sin\frac{k\pi}{a}x \quad (k=1,2,3,\cdots)$ 因此

$$X_k = B_k \sin\frac{k\pi}{a}x$$

方程式(5.2.44)的解是 $Y(y)=C\text{ch}\beta y+D\text{sh}\beta y$，将它改写成

$$Y(y) = E\text{sh}\beta(y + F)$$

其中 $E=(D^2-C^2)^{\frac{1}{2}}, F=\frac{1}{\beta}\text{arth}\,\frac{C}{D}$，利用余下的齐次边界条件

$$u(x,b) = X(x)Y(b) = 0$$

得
$$Y(b) = E\text{sh}\beta(b + F) = 0$$

故对于非零解 $u(x,y)$ 必有 $F=-b, E\neq 0$，于是

$$Y_k(y) = E_k \text{sh}\frac{k\pi}{a}(y - b)$$

由于泛定方程式(5.2.37)及边界条件式(5.2.39)、式(5.2.40)、式(5.2.41)均为线性齐次的，应用迭加原理得解为

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi}{a}x\,\text{sh}\frac{k\pi}{a}(y - b)$$

其中 $a_k=B_kE_k$，再利用非齐次边界条件得

$$u(x,0)=f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\operatorname{sh}\left(\frac{-k\pi b}{a}\right)\sin\frac{k\pi}{a}x$$

上式右端是富里埃正弦级数，所以

$$\bar{a}_k=\frac{-2}{a\operatorname{sh}\frac{k\pi b}{a}}\int_0^a f(x)\sin\frac{k\pi}{a}x\mathrm{d}x$$

于是形式解为

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\bar{a}_k\frac{\operatorname{sh}\frac{k\pi}{a}(y-b)}{\operatorname{sh}\frac{k\pi b}{a}}\sin\frac{k\pi}{a}x \qquad (5.2.45)$$

其次，考虑矩形的一般狄利克莱问题

$$\begin{cases}\Delta u=0 \quad 0<x<a \quad 0<y<b & (5.2.46)\\ u(x,0)=f_1(x) \quad u(x,b)=f_2(x) & (5.2.47)\\ u(0,y)=f_3(y) \quad u(a,y)=f_4(y) & (5.2.48)\end{cases}$$

可将它分成四个问题求解，其中每一个定解问题仅有一个非齐次边界条件，其余的三个边界条件为零。按上述确定每个定解问题的解，将四个解相加，即得矩形的一般狄利克莱问题的解。

5. 泊松方程的狄利克莱问题

如果知道了泊松方程的一个特解和相应的拉普拉斯方程狄利克莱的解，则泊松方程的狄利克莱问题的解就得到了解决。

考察边值问题

$$\begin{cases}\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=f(x,y) \text{ 在 } \Omega \text{ 内}\\ u(x,y)|_\Gamma=g(x,y)\end{cases}$$

假设解可写成

$$u=v+w$$

其中 v 是泊松方程的一个特解，w 是相应齐次方程的解，即

$$\begin{cases}\Delta v=f \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}\\ v|_\Gamma=0\end{cases}$$

只要求出了 v，则 w 可由下述狄利克莱问题

$$\begin{cases}\Delta w = 0 & \text{在}\ \Omega\ \text{内} \\ w|_{\Gamma} = -v + g(x,y)\end{cases}$$

求出。

当 $f(x,y)$ 是 n 次多项式时，求特解的常用方法是：用待定系数法寻求一个 $n+2$ 次多项式的解。

例 1 解机轴扭转问题

$$\begin{cases}\Delta u = -2 & 0 < x < a \quad 0 < y < b \\ u(0,y) = u(a,y) = 0 \\ u(x,0) = u(x,b) = 0\end{cases}$$

解：令 $u=v+w$，用待定系数法求解。设 v 为二次多项式

$$v(x,y) = A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy + Fy^2$$

代入泊松方程得

$$2D + 2F = -2$$

最简的方法是选取 $D=-1, F=0$，其余的系数均为任意的，为使 v 在 $x=0$ 和 $x=a$ 两边上值为零，我们可取

$$v(x,y) = x(a-x)$$

然后，由定解问题

$$\begin{cases}\Delta w = 0 \\ w|_{x=0} = -v(x,y)|_{x=0} = 0,\ w|_{x=a} = -v|_{x=a} = 0 \\ w|_{y=0} = -v|_{y=0} = -x(a-x),\ w|_{y=b} = -v|_{y=b} = -x(a-x)\end{cases}$$

求 w，像前段求解狄利克莱问题一样，求得解是

$$w(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \operatorname{ch}\frac{k\pi}{a}y + b_k \operatorname{sh}\frac{k\pi}{a}y\right)\sin\frac{k\pi}{a}x$$

利用非齐次边界条件得

$$w(x,0) = -(ax - x^2) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi}{a}x$$

$$\begin{aligned}w(x,b) &= -(ax - x^2) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \operatorname{ch}\frac{k\pi}{a}b + b_k \operatorname{sh}\frac{k\pi}{a}b\right)\sin\frac{k\pi}{a}x\end{aligned}$$

由此得

$$a_k = \frac{2}{a}\int_0^a (x^2 - ax)\sin\frac{k\pi}{a}x\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{当 } k \text{ 为偶数} \\ \dfrac{-8a^2}{k^3\pi^3} & \text{当 } k \text{ 为奇数} \end{cases}$$

和

$$a_k\mathrm{ch}\frac{k\pi}{a}b + b_k\mathrm{sh}\frac{k\pi}{a}b = \frac{2}{a}\int_0^a (x^2 - ax)\sin\frac{k\pi}{a}x\mathrm{d}x$$

所以有

$$b_k = \frac{1 - \mathrm{ch}\dfrac{k\pi}{a}b}{\mathrm{sh}\dfrac{k\pi}{a}b}a_k$$

因此，泊松方程的狄利克莱问题的解是

$$u(x,y) = x(a - x)$$

$$-\frac{8a^2}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\cdot\frac{\mathrm{sh}(2k-1)\pi\dfrac{b-y}{a} + \mathrm{sh}\dfrac{(2k-1)\pi y}{a}}{\mathrm{sh}\dfrac{(2k-1)\pi b}{a}}\cdot\frac{\sin\dfrac{(2k-1)\pi x}{a}}{(2k-1)^3}$$

6. 矩形域的牛曼问题、格仁贝尔方法

现在我们来讨论牛曼问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad 0 < x < a \quad 0 < y < b & (5.2.49) \\ u_x(0,y) = f_1(y) & (5.2.50) \\ u_x(a,y) = f_2(y) & (5.2.51) \\ u_y(x,0) = g_1(x) & (5.2.52) \\ u_y(x,b) = g_2(x) & (5.2.53) \end{cases}$$

这时，必须满足的相容性条件是

$$\int_0^a [g_1(x) - g_2(x)]\mathrm{d}x + \int_0^b [f_1(y) - f_2(y)]\mathrm{d}y = 0 \tag{5.2.54}$$

假设解的形式为

$$u(x,y)=u_1(x,y)+u_2(x,y)$$

其中 $u_1(x,y)$是定解问题

$$\begin{cases}\Delta u_1=0 \quad 0<x<a \quad 0<y<b \\ \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\left.\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=a}=0 \\ \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=0}=g_1(x),\left.\dfrac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=b}=g_2(x)\end{cases} \tag{5.2.55}$$

的解。$g_1(x)$与 $g_2(x)$满足相容性条件

$$\int_0^a[g_1(x)-g_2(x)]\mathrm{d}x=0 \tag{5.2.56}$$

函数 $u_2(x,y)$是定解问题

$$\begin{cases}\Delta u_2=0 \quad 0<x<a \quad 0<y<b \\ \left.\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=0}=f_1(y),\left.\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=a}=f_2(y) \\ \left.\dfrac{\partial u_2}{\partial y}\right|_{y=0}=0,\left.\dfrac{\partial u_2}{\partial y}\right|_{y=b}=0\end{cases} \tag{5.2.57}$$

的解。其中 f_1 和 f_2 满足相容性条件

$$\int_0^b[f_1(y)-f_2(y)]\mathrm{d}y=0 \tag{5.2.58}$$

因此，解 $u_1(x,y)$和 $u_2(x,y)$都是可以确定的，且条件式(5.2.56)和式(5.2.58)确保了条件式(5.2.54)得到满足，于是问题得到解决。

然而，由条件式(5.2.54)一般不能推出条件式(5.2.56)和式(5.2.58)。所以，用上述方法求矩形域的牛曼问题的解，一般是困难的，以至是不可能的。

为了较顺利地解决这一问题，格仁贝尔提出下面的方法：

设解的形式为

$$u(x,y)=\frac{Y_0(y)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}X_k(x)Y_k(y) \tag{5.2.59}$$

其中，$X_k(x)=\cos\dfrac{k\pi}{a}x$ 是固有值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(a) = 0 \end{cases}$$

对应于固有值 $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2$ 的固有函数。

由式(5.2.59)，并利用富里埃级数即知

$$Y_k(y) = \frac{2}{a}\int_0^a u(x,y)X_k(x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{a}\int_0^a u(x,y)\cos\frac{k\pi}{a}x\mathrm{d}x \qquad (5.2.60)$$

将方程式(5.2.49)两边同乘以 $\frac{2}{a}\cos\frac{k\pi}{a}x$，并对 x 由 0 至 a 积分，得

$$\frac{2}{a}\int_0^a (u_{xx} + u_{yy})\cos\frac{k\pi}{a}x\mathrm{d}x = 0$$

即

$$Y''_k + \frac{2}{a}\int_0^a u_{xx}\cos\frac{k\pi}{a}x\mathrm{d}x = 0$$

将上式左端第二项进行分部积分，并利用边界条件式(5.2.50)，式(5.2.51)得

$$Y''_k - \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 Y_k = F_k(y) \qquad (5.2.61)$$

其中

$$F_k(y) = \frac{2}{a}[f_1(y) - (-1)^k f_2(y)]$$

常微分方程(5.2.61)的解是

$$Y_k(y) = A_k\mathrm{ch}\frac{k\pi}{a}y + B_k\mathrm{sh}\frac{k\pi}{a}y + \frac{2}{k\pi}\int_0^y F_k(\tau)\mathrm{sh}\frac{k\pi(y-\tau)}{a}\mathrm{d}\tau \qquad (5.2.62)$$

其中系数 A_k、B_k 可由边界条件

$$Y'_k(0) = \frac{2}{a}\int_0^a u_y(x,0)\cos\frac{k\pi}{a}x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{a}\int_0^a g_1(x)\cos\frac{k\pi}{a}x\mathrm{d}x \qquad (5.2.62)$$

和

$$Y'_k(b) = \frac{2}{a}\int_0^a u_y(x,b)\cos\frac{k\pi}{a}x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{a}\int_0^a g_2(x)\cos\frac{k\pi}{a}x\mathrm{d}x \qquad (5.2.63)$$

确定。

往下验证由格仁贝尔方法得到的解满足相容性条件 。

当 $k=0$ 时,方程式(5.2.61)形式是

$$Y''_0 = \frac{2}{a}[f_1(y) - f_2(y)]$$

所以 $\quad Y'_0 = \frac{2}{a}\int_0^y [f_1(\tau) - f_2(\tau)]\mathrm{d}\tau + C$

其中积分常数 C,可利用式(5.2.62)令 $k=0$ 确定

$$C = \frac{2}{a}\int_0^a g_1(x)\mathrm{d}x$$

因此

$$Y'_0(y) = \frac{2}{a}\left\{\int_0^y [f_1(\tau) - f_2(\tau)]\mathrm{d}\tau + \int_0^a g_1(x)\mathrm{d}x\right\}$$

$$Y'_0(b) = \frac{2}{a}\left\{\int_0^b [f_1(\tau) - f_2(\tau)]\mathrm{d}\tau + \int_0^a g_1(x)\mathrm{d}x\right\}$$

由式(5.2.63)又有 $\quad Y'_0(b) = \frac{2}{a}\int_0^a g_2(x)\mathrm{d}x \quad$ 从而得到

$$\int_2^b [f_1(y) - f_2(y)]\mathrm{d}y + \int_0^a [g_1(x) - g_2(x)]\mathrm{d}x = 0$$

这正是相容性条件式(5.2.54)。

多于两个空间变量的定解问题的讨论更加复杂。下面几段将介绍三维空间中的边值问题。

7. 立方体的狄利克莱问题

考察棱长为 π 的立方体内既无热源又无热汇的稳定温度分布。在立体表面上的温度,除表面 $z=0$ 保持给定的温度 $f(x,y)$ 外,其余五个面的温度均为零。

这个问题归结为求解

$$\begin{cases}\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \quad 0 < x < \pi \quad 0 < y < \pi \quad 0 < z < \pi \\ u(0,y,z) = u(\pi,y,z) = 0 \\ u(x,0,z) = u(x,\pi,z) = 0 \\ u(x,y,\pi) = 0 \\ u(x,y,0) = f(x,y)\end{cases}$$

利用分离变量法，设解为

$$u(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

将它代入拉普拉斯方程，得

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\frac{Z''}{Z}$$

欲使上式成立，两边都必须等于常数，于是有

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\frac{Z''}{Z} = \lambda$$

同理有

$$\frac{X''}{X} = \lambda - \frac{Y''}{Y} = \mu$$

由此得三个常微分方程

$$Z'' - \mu Z = 0, \quad Y'' - (\lambda - \mu)Y = 0, \quad Z'' + \lambda Z = 0$$

由边界条件得 X 的固有值问题

$$\begin{cases}X'' - \mu X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0\end{cases}$$

其固有值是 $\mu = -m^2 (m=1,2,3,\cdots)$ 及相应的固有函数 $\sin mx$ $(m=1,2,3,\cdots)$

类似地得 Y 的固有值问题

$$\begin{cases}Y'' - (\lambda - \mu)Y = 0 \\ Y(0) = Y(\pi) = 0\end{cases}$$

的固有值是 $\lambda - \mu = -k^2 \quad (k=1,2,3,\cdots)$ 及相应的固有函数 $\sin ky$ $(k=1,2,3,\cdots)$

由于 $\lambda = -(m^2+k^2)$，故 $Z''+\lambda Z=0$ 满足条件 $Z(\pi)=0$ 的解是

$$Z(z)=C\text{sh}\sqrt{m^2+k^2}(\pi-z)$$

从而得拉普拉斯方程满足齐次边界条件的解

$$u(x,y,z)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{mk}\text{sh}\sqrt{m^2+k^2}(\pi-z)\sin mx\sin ky$$

再利用非齐次边界条件得

$$f(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{mk}\text{sh}(\sqrt{m^2+k^2}\pi)\sin mx\sin ky$$

其中二重富里埃级数的系数为

$$a_{mk}\text{sh}\sqrt{m^2+k^2}\pi=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}f(x,y)\sin mx\sin ky\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

于是，立方体的狄利克莱问题的解是

$$u(x,y,z)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}b_{mk}\frac{\text{sh}\sqrt{m^2+k^2}(\pi-z)}{\text{sh}\sqrt{m^2+k^2}\pi}\sin mx\sin ky$$

其中 $$b_{mk}=a_{mk}\text{sh}\sqrt{m^2+k^2}\pi.$$

8. 圆柱体的狄利克莱问题

例 2 考察半径为 a，高为 l 的圆柱体内部的电位 u 的问题，电位 u 满足拉普拉斯方程

$$\Delta u=u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_{\rho}+\frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta}+u_{zz}=0\quad 0\leqslant\rho<a\quad 0<z<l \tag{5.2.64}$$

设圆柱体的侧面 $\rho=a$ 及顶部 $z=l$ 接地，即电位等于零；而在下底 $z=0$ 上，电位为 $f(\rho,\theta)$，且 $f(a,\theta)=0$，即边界条件是

$$\begin{cases} u(a,\theta,z)=u(\rho,\theta,l)=0 & (5.2.65)\\ u(\rho,\theta,0)=f(\rho,\theta) & (5.2.66)\end{cases}$$

其中 $f(a,\theta)=0$。

解：设 $u(\rho,\theta,z)=R(\rho)\Theta(\theta)Z(z)$，将它代入拉普拉斯方程得

$$\frac{R''+\frac{1}{\rho}R'}{R}=\frac{1}{\rho^2}\frac{\Theta''}{\Theta}=-\frac{Z''}{Z}=\lambda$$

由此得

$$\frac{\rho^2 R'' + \rho R'}{R} - \rho^2\lambda = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \mu$$

从而得到三个常微分方程

$$\rho^2 R'' + \rho R' - (\lambda\rho^2 + \mu)R = 0 \tag{5.2.67}$$

$$\Theta'' + \mu\Theta = 0 \tag{5.2.68}$$

$$Z'' + \lambda Z = 0 \tag{5.2.69}$$

利用周期性条件得 Θ 的固有值问题

$$\begin{cases} \Theta'' + \mu\Theta = 0 \\ \Theta(0) = \Theta(2\pi) \\ \Theta'(0) = \Theta'(2\pi) \end{cases}$$

其固有值是 $\mu = m^2 (m = 0, 1, 2, \cdots)$。相应的固有函数是 $\sin m\theta$，$\cos m\theta$。于是

$$\Theta_m(\theta) = A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta$$

假定 λ 为负实数，可令 $\lambda = -\beta^2 (\beta > 0)$。利用条件 $Z(l) = 0$，方程(5.2.69)的解可表示为

$$Z(z) = C\operatorname{sh}\beta(l - z)$$

对于方程(5.2.67)。引入变量代换 $\xi = \beta\rho$ 后，化为

$$\xi^2 \frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}\xi^2} + \xi \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\xi} + (\xi - m^2)R = 0$$

这是 m 阶贝塞尔方程，它的通解是

$$R(\xi) = DJ_m(\xi) + EY_m(\xi)$$

其中 J_m 和 Y_m 分别是第一类和第二类 m 阶贝塞尔函数，换回原变量

$$R(\rho) = DJ_m(\beta\rho) + EY_m(\beta\rho)$$

由于 $Y_m(\beta\rho)$ 在 $\rho = 0$ 处无界，故取 $E = 0$。又条件 $R(a) = 0$ 要求有

$$J_m(\beta a) = 0$$

熟知，对每一 $m \geqslant 0$，上式存在有无穷多个正零点，把它们按递增顺序排列，有

$$0 < \alpha_{m_1} < \alpha_{m_2} < \cdots < \alpha_{m_k} < \cdots$$

由此得

$$\beta_{m_k} = \frac{\alpha_{m_k}}{a}$$

所以

$$R_{m_k}(\rho) = D_{m_k} J_m\left(\frac{\alpha_{m_k}\rho}{a}\right)$$

最后，由迭加原理得解形如

$$u(\rho,\theta,z) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} J_m\left(\frac{\alpha_{m_k}\rho}{a}\right)(a_{m_k}\cos m\theta + b_{m_k}\sin m\theta)\operatorname{sh}\frac{\alpha_{m_k}(l-z)}{a}$$

为满足非齐次边界条件，要求有

$$f(\rho,\theta) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} J_m\left(\frac{\alpha_{m_k}\rho}{a}\right)(a_{m_k}\cos m\theta + b_{m_k}\sin m\theta)\operatorname{sh}\frac{\alpha_{m_k}l}{a}$$

故有系数 a_{m_k} 和 b_{m_k} 为

$$a_{0_k} = \frac{1}{\pi a^2 \operatorname{sh}\frac{\alpha_{0_k}l}{a} J_1^2(\alpha_{0_k})}\int_0^a\int_0^{2\pi} f(\rho,\theta)J_0\left(\frac{\alpha_{0_k}\rho}{a}\right)\rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta$$

$$a_{m_k} = \frac{1}{\pi a^2 \operatorname{sh}\left(\frac{\alpha_{m_k}l}{a}\right) J_{m+1}^2(\alpha_{m_k})}\int_0^a\int_0^{2\pi} f(\rho,\theta)J_m\left(\frac{\alpha_{m_k}\rho}{a}\right)\cos m\theta \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta$$

$$b_{m_k} = \frac{1}{\pi a^2 \operatorname{sh}\left(\frac{\alpha_{m_k}l}{a}\right) J_{m+1}^2(\alpha_{m_k})}\int_0^a\int_0^{2\pi} f(\rho,\theta)J_m\left(\frac{\alpha_{m_k}\rho}{a}\right)\sin m\theta \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta$$

例 3 考察定解问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad 0 \leqslant \rho < a \quad 0 < z < \pi \\ u(\rho,\theta,0) = 0 \\ u(\rho,\theta,\pi) = 0 \\ u(a,\theta,z) = f(\theta,z) \end{cases}$$

它与例 2 是同样的问题，但带有不同的边界条件。

解：如同例 2，由分离变量法得

$$\rho^2 R'' + \rho R' - (\lambda\rho^2 + \mu)R = 0$$

$$\Theta'' + \mu\Theta = 0$$

$$Z'' + \lambda Z = 0$$

由周期性条件，如同上例所述，$\Theta(\theta)$的固有值是 $\mu = m^2 (m = 0, 1, 2, \cdots)$，相应的固有函数是 $\sin m\theta, \cos m\theta$，于是

$$\Theta_m(\theta) = A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta$$

设 $\lambda = \beta^2 (\beta > 0)$，则固有值问题

$$\begin{cases} Z'' + \beta^2 Z = 0 \\ Z(0) = Z(\pi) = 0 \end{cases}$$

的非零解是

$$Z_k = C_k \sin kz \quad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

而方程

$$R'' + \frac{1}{\rho}R' - \left(k^2 + \frac{m^2}{\rho^2}\right)R = 0$$

的解是

$$R(\rho) = DI_m(k\rho) + EK_m(k\rho)$$

其中 I_m 和 K_m 分别为第一和第二类 m 阶修正贝塞尔函数

因为 $R(\rho)$在 $\rho = 0$ 处必须是有限的，故应取 $E = 0$，从而

$$R(\rho) = DI_m(k\rho)$$

再由非齐次边界条件可得所求的解为

$$u(\rho, \theta, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{o_k}}{2} \frac{I_0(k\rho)}{I_0(ka)} \sin kz + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (a_{m_k} \cos m\theta + b_{m_k} \sin m\theta) \frac{I_m(k\rho)}{I_m(ka)} \sin kz$$

其中

$$a_{m_k} = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(0, z) \sin kz \cos m\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}z$$

$$b_{m_k} = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(0, z) \sin kz \sin m\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}z$$

9. 球体的狄利克莱问题

1）内问题

例 4 为了确定一个球内的电位，将拉普拉斯方程化为球坐标形式

$$\Delta u = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}) + \frac{1}{\rho^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}) + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0 \tag{5.2.70}$$

$$0 \leqslant \rho < a \quad 0 < \theta < \pi \quad 0 < \varphi < 2\pi$$

在球面上的电位给定为

$$u(a,\theta,\varphi) = f(\theta,\varphi) \tag{5.2.71}$$

解： 用分离变量法，设

$$u(\rho,\theta,\varphi) = R(\rho)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

把它代入方程(5.2.70)，整理后得常微分方程

$$\rho^2 R'' + 2\rho R' - \lambda R = 0 \tag{5.2.72}$$

$$\sin^2\theta\Theta'' + \sin\theta\cos\theta\Theta' + (\lambda\sin^2\theta - \mu)\Theta = 0 \tag{5.2.73}$$

$$\Phi'' + \mu\Phi = 0 \tag{5.2.74}$$

方程(5.2.74)的通解是

$$\Phi(\varphi) = A\cos\sqrt{\mu}\varphi + B\sin\sqrt{\mu}\varphi$$

由周期性条件得

$$\sqrt{\mu} = m \quad (m = 0,1,2,\cdots)$$

故

$$\Phi_m(\varphi) = A_m\cos m\varphi + B_m\sin m\varphi \tag{5.2.75}$$

引入变量 $\xi=\cos\theta$，方程(5.2.73)化为

$$(1-\xi^2)\Theta'' - 2\xi\Theta' + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-\xi^2}\right)\Theta = 0$$

这是连带勒让德方程。当 $\lambda=k(k+1)$ $(k=0,1,2,\cdots)$时，其通解为

$$\Theta(\theta) = CP_k^m(\cos\theta) + D\theta_k^m(\cos\theta)$$

其中 P_k^m、θ_k^m 分别是第一类和第二类连带勒让德函数。

由于 $\Theta(\theta)$在 $\theta=0,\pi$ 处的有界性对应于 $\Theta(\xi)$在 $\xi=\pm1$ 处的

有界性，而 θ_k^m 在 $\xi=\pm1$ 处是无界的，故应选取 $D=0$。因而方程(5.2.73)的有界解为

$$\Theta_{km}(\theta)=C_{km}P_k^m(\cos\theta) \tag{5.2.76}$$

式(5.2.72)是 Euler 方程，其解为 $R(\rho)=\rho^\beta$ 代入方程式(5.2.72)得

$$\rho^2\beta(\beta-1)\rho^{\beta-2}+2\rho\beta\rho^{\beta-1}-\lambda\rho^\beta=0$$

由此得

$$\beta^2+\beta-\lambda=0$$

将 $\lambda=k(k+1)$ 代入求得两根 $\beta=k$ 和 $\beta=-(k+1)$。所以方程式(5.2.72)的通解是

$$R(\rho)=E\rho^k+F\rho^{-(1+k)}$$

因为 R 在 $\rho=0$ 处是有界的，故应有 $F=0$，于是有

$$R_k(\rho)=E_k\rho^k$$

这样，在球坐标系下的拉普拉斯方程的解是

$$u(\rho,\theta,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\rho^kP_k^m(\cos\theta)(a_{km}\cos m\varphi+b_{km}\sin m\varphi)$$

为使 u 满足边界条件，必须

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}a^kP_k^m(\cos\theta)(a_{km}\cos m\varphi+b_{km}\sin m\varphi)$$

其中 $0\leqslant\theta\leqslant\pi,0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$。根据 $P_k^m(\cos\theta)\cos m\varphi$ 和 $P_k^m(\cos\theta)\sin m\varphi$ 的正交性，可得系数

$$a_{km}=\frac{2k+1}{2\pi a^k}\cdot\frac{(k-m)!}{(k+m)!}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\theta,\varphi)P_k^m(\cos\theta)\cos m\varphi\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$b_{km}=\frac{2k+1}{2\pi a^k}\cdot\frac{(k-m)!}{(k+m)!}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\theta,\varphi)P_k^m(\cos\theta)\sin m\varphi\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

其中 $m\leqslant k,m=1,2,3,\cdots;k=1,2,3,\cdots$

$$a_{k0}=\frac{2k+1}{4\pi a^k}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\theta,\varphi)P_k(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$k=0,1,2,\cdots$$

2）外问题

例 5 为确定在均匀电场内的接地导电球外的电位分布，需求解定解问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \rho > a \quad 0 < \theta < \pi \quad 0 < \varphi < 2\pi \\ u(a,\theta) = 0 \\ u \to - E_0 \rho\cos\theta \quad \text{当 } \rho \to \infty \end{cases}$$

解： 设均匀电场是 Z 方向的，因而 u 与 φ 无关。在球坐标系下的拉普拉斯方程为

$$\Delta u = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}) + \frac{1}{\rho^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}) = 0$$

或

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{\text{ctg}\theta}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial\theta} = 0$$

利用分离变量法，设 $u(\rho,\theta) = R(\rho)\Theta(\theta)$。将它代入拉普拉斯方程，化简整理后得

$$\rho^2 R'' + 2\rho R' - \lambda R = 0$$

$$\sin^2\theta\Theta'' + \sin\theta\cos\theta\Theta' + \lambda\sin^2\theta\Theta = 0$$

当 $\lambda = k(k+1)$，$(k=0,1,2,\cdots)$时，上述第二个常微分方程是勒让德方程，其通解是

$$\Theta_k(\theta) = A_k P_k(\cos\theta) + B_k Q_k(\cos\theta)$$

其中 $P_k(\cos\theta)$和 $Q_k(\cos\theta)$分别是第一类和第二类勒让德函数。为使解在 $\theta=0$ 与 $\theta=\pi$ 处有界，必须取 $B_k=0$，故

$$\Theta_k(\theta) = A_k P_k(\cos\theta)$$

第一个常微分方程是 Euler 方程，其通解为

$$R_k(\rho) = C_k\rho^k + D_k\rho^{-(k+1)}$$

从而

$$u(\rho,\theta) = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k\rho^k + b_k\rho^{-(k+1)})P_k(\cos\theta)$$

为满足无穷远处的条件，应有

$$a_1 = -E_0 \quad a_k = 0 \quad (k \geqslant 2)$$

于是

$$u(\rho,\theta) = -E_0\rho\cos\theta + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{\rho^{k+1}} P_k(\cos\theta)$$

由边界条件 $u(a,\theta)=0$ 得到

$$0 = -E_0 a\cos\theta + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{a^{k+1}} P_k(\cos\theta)$$

根据勒让德函数的正交性，可求得

$$b_k = \frac{2k+1}{2} E_0 a^{k-2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos\theta P_k(\cos\theta) \mathrm{d}\cos\theta = E_0 a^3 \delta_{k1}$$

（因为上面的积分除 $k=1$ 外，对所有的 k 都等于零），于是电位分布是

$$u(\rho,\theta) = -E_0\rho\cos\theta + E_0 \frac{a^3}{\rho^2}\cos\theta$$

§5.3 视察法解边值问题

视察法是一种简捷有效的求解边值问题的方法，特别是当区域边界规整的情形，均可先采用视察法求解。实际上，对于有些定解问题，如果结合物理意义分析一下，就能确定试探求解的途径，对于由数学式子给出的边值问题，根据边界条件的具体函数直接观察试探，有时亦能求出问题的解，下面通过例子说明这种方法。

例6 求圆柱域 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}<R$ 内的电位，使在柱面上有给定的电场强度法向分量。

$$-\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\rho=R} = -xy|_{\rho=R}$$

由于电位分布是以同心柱面为等位面，与 z 方向无关，因而成为平面问题。

$$\Delta u = 0 \quad \rho < R \tag{5.3.1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\rho=R} = xy|_{\rho=R} \tag{5.3.2}$$

解： 在平面极坐标系下，$x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi, xy=\rho^2\cos\varphi\sin\varphi$ $=\frac{\rho^2}{2}\sin2\varphi$，因为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\rho=R} = \left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=R}$$

$$= xy|_{\rho=R} = \frac{R^2}{2}\sin2\varphi = \frac{0}{\partial\rho}(\frac{R}{4}\rho^2\sin2\varphi + C)|_{\rho=R}$$

其中 C 为任意常数，易知函数

$$u(\rho,\varphi) = \frac{R}{4}\rho^2\sin2\varphi + C = \frac{R}{2}xy + C$$

例 7 求二同心球面导体 $\rho=\rho_1$ 和 $\rho=\rho_2$ 构成的电容器内的电位，使内球面 $\rho=\rho_1$ 保持常值电位 $u=v_0$，外球面 $\rho=\rho_2$ 接地。

解： 这个问题归为拉普拉斯方程的边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 & (5.3.3) \\ u|_{\rho=\rho_1} = v_0,\ u|_{\rho=\rho_2} = 0 & (5.3.4) \end{cases}$$

由静电学知，函数 u 应是球对称的，即仅为 ρ 的函数$u=u(\rho)$。而电位与 ρ 成反比，由以上分析，可以试图用

$$u(\rho) = \frac{A}{\rho} + B$$

求式(5.3.3)、式(5.3.4)的解，其中 A 和 B 为待定系数，容易验证：$u(\rho)=\frac{A}{\rho}+B$ 满足拉普拉斯方程，为确定 A 和 B，利用边界条件得

$$\begin{cases} \dfrac{A}{\rho_1} + B = v_0 \\ \dfrac{A}{\rho_2} + B = 0 \end{cases}$$

解方程组求得 $A=v_0\dfrac{\rho_1\rho_2}{\rho_2-\rho_1}$，$B=-v_0\dfrac{\rho_1}{\rho_2-\rho_1}$

从而求得电位为

$$u(\rho)=\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_2-\rho_1}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_2}\right)v_0$$

例 8 求解边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=C & (x,y)\in D\\ u|_\Gamma=0\end{cases}$$

其中 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$a$、$b$、$C$ 为常数，D 为由 Γ 所围的区域。

解： 因为 $u|_\Gamma=0$，所以解式应含有因子：$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)$。由泛定方程知，解式对 x、y 分别求二阶偏导之和应等于 C，因此，我们可以探求解式为

$$u=m\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)$$

其中 m 为待定常数，显然它满足边界条件。为确定常数 m，将上式代入泛定方程得

$$m\left(\frac{2}{a^2}+\frac{2}{b^2}\right)=c,\quad m=\frac{a^2b^2}{2(a^2+b^2)}c$$

故边值问题的解为

$$u=\frac{a^2b^2c}{2(a^2+b^2)}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)$$

例 9 求定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=B, & x^2+y^2<a^2\\ u|_\Gamma=A\cos\varphi, & \Gamma:x^2+y^2=a^2\end{cases}$$

解： 将原定解问题分解成如下两个问题

$$(\text{I})\begin{cases}\Delta u_1=0\\ u_1|_\Gamma=A\cos\varphi\end{cases}\qquad(\text{II})\begin{cases}\Delta u_2=B\\ u_2|_\Gamma=0\end{cases}$$

于是 $u=u_1+u_2$。

关于 u_1，因为区域为圆。由极坐标知 $\cos\varphi=\frac{x}{a}$，由边值条件有

$A\cos\varphi = A\dfrac{x}{a}$，显然，函数 $u_1 = A\dfrac{x}{a}$ 满足拉普拉斯方程，故为（Ⅰ）的解。

求解（Ⅰ）。由边界条件知，其解应含有因子 $(x^2+y^2-a^2)$，由泛定方程知，解对 x、y 的二阶偏之和等于常数 B，因此，我们设想解应具有形式

$$u_2 = k(x^2 + y^2 - a^2)$$

其中 k 为待定常数，代入泛定方程得

$$4k = B, \quad k = \frac{B}{4}$$

故
$$u_2 = \frac{B}{4}(x^2 + y^2 - a^2)$$

从而原问题的解是

$$u = u_1 + u_2 = \frac{A}{a}x + \frac{B}{4}(x^2 + y^2 - a^2)$$

例 10 求定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = Axy, x^2 + y^2 < a \\ u|_\Gamma = 0,\ \Gamma: x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

其中 A 为常数。

解： 由边界条件知，解含有因子 $(x^2+y^2-a^2)$。由泛定方程知，解式对 x，y 分别求二阶偏导之和还含有因子 kxy，于是可令解式

$$u = k(x^2 + y^2 - a^2)xy$$

代入泛定方程

$$u_x = ky(x^2 + y^2 - a^2) + 2kx^2y$$

$$u_{xx} = 6kxy,\ u_{yy} = 6kxy$$

故有
$$\Delta u = 12kxy$$

即 $12kxy = Axy$ $k = \dfrac{A}{12}$，所以定解问题的解为 $u = \dfrac{A}{12}(x^2 + y^2 - a^2)xy$。

习 题 五

1. 求扇形域内的边值问题

$$\begin{cases}\Delta u = 0 \quad 0 \leqslant \rho < a \quad 0 < \theta < \alpha \\ u(\rho, 0) = u(\rho, \alpha) = 0 \\ u(a, \theta) = f(\theta)\end{cases}$$

2. 在某 $R=1$ 的空心球表面上充电，使其表面的一半电位为 u_0，另一半电位为零，求球内部的电位分布

（提示：归结为定解问题）

$$\begin{cases}\Delta u = 0 \quad (u \text{ 与 } z \text{ 轴对称}) \\ u|_{\rho=1} = \begin{cases} u_0 & 0 < z < 1 \\ 0 & -1 < z < 0\end{cases}\end{cases}$$

3. 求矩形域内边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad 0 < x < a \quad 0 < y < b \\ u(x, 0) = u(x, b) = 0 \quad 0 \leqslant x \leqslant a \\ u(0, y) = \sin \dfrac{\pi y}{b} \quad u(a, y) = 0 \quad 0 \leqslant y \leqslant b\end{cases}$$

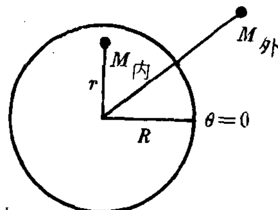


图 5-2

4. 求定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad 0 < x < a \quad 0 < y < b \\ u(0, y) = 0, u(a, y) = Ay \quad 0 \leqslant y \leqslant b \\ u_y(x, 0) = 0, \quad u_y(x, b) = 0 \quad 0 \leqslant x \leqslant a\end{cases}$$

5. 求下列定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (0 < x < a) \quad 0 < y < +\infty \\ u(0, y) = u(a, y) = 0 \quad 0 \leqslant y < +\infty \\ u(x, 0) = A\left(1 - \dfrac{x}{a}\right) \\ \lim\limits_{y \to +\infty} u(x, y) = 0 \quad\quad 0 \leqslant x \leqslant a\end{cases}$$

6. 设有半径为 a 的圆形铁丝环，充有 E 个单位静电，试求充电后环对于

电场中任一点值的问题,归结为解下列边值问题

$$\begin{cases} u_{\rho\rho}+\dfrac{2}{\rho}u_\rho+\dfrac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta}+\dfrac{\text{ctg}\theta}{\rho^2}u_\theta=0 \\ u|_{\theta=0}=\dfrac{E}{\sqrt{\rho^2+R^2}} \end{cases}$$

7. 在以原点为圆心,a 为半径的圆内,求泊松方程 $\Delta u=-4$ 的解,使它满足 $u|_{\rho=a}=0$。

8. 求泊松方程第一边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-xy \quad x^2+y^2<a^2 \\ u|_{\rho=a}=0 \quad \Gamma: x^2+y^2=a^2 \end{cases}$$

的解。

9. 确定在两个取不同常电位的同心球之间的电位分布

$$\begin{cases} \Delta u=0 \quad a<\rho<b \\ u|_{\rho=a}=A \quad u|_{\rho=b}=B \end{cases}$$

10. 一个半径为 a 的介质球放在均匀电场 E_0 内,求球内和球外的电位分布,这个问题的定解问题是

$$\begin{cases} \Delta u_1=\Delta u_2=0 \\ k\dfrac{\partial u_1}{\partial\rho}\Big|_{\rho=a}=\dfrac{\partial u_2}{\partial\rho}\Big|_{\rho=a} \\ u_1|_{\rho=a}=u_2|_{\rho=a} \\ u_2\to E_0\rho\cos\theta \quad \rho\to\infty \end{cases}$$

11. 说明牛曼内部问题有解的条件 $\iint_s f\mathrm{d}s=0$ 的物理意义。

12. 有一个底面半径为 R,高为 h 的圆柱体,它的上下两个底都保持温度为零度,而侧表面上温度分布情况由一个 z 的函数确定,求柱体内部各点的定常温度。问题归结为

$$\begin{cases} u_{\rho\rho}+\dfrac{1}{\rho}u_\rho+u_{zz}=0 \quad 0<\rho<R,\ 0<z<h \\ u(\rho,0)=u(\rho,h)=0 \quad 0\leqslant\rho\leqslant R \\ u(R,z)=f(z) \qquad 0\leqslant z\leqslant h \end{cases}$$

13. 在半径为 a,圆心在原点的圆上,用视察法求下列各边值问题的解

(1) $\begin{cases} \Delta u=0 \\ u|_\Gamma=A\cos\varphi \end{cases}$ (2) $\begin{cases} \Delta u=0 \\ u|_\Gamma=A+B\sin\varphi \end{cases}$

(3) $\begin{cases}\Delta u = A\\ u|_\Gamma = A\cos\varphi\end{cases}$ (4) $\begin{cases}\Delta u = Axy\\ u|_\Gamma = A + B\sin\varphi\end{cases}$

14. 用视察法求解下列定解问题

(1) $\begin{cases}\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 1\\ u|_{x^2+y^2=1} = 4\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 1\\ u|_{x^2+y^2+z^2=1} = 9\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = \sqrt{x^2+y^2}\\ u|_{\rho^2=1} = 2\end{cases}$

15. 设 D 为以 $\Gamma: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围的区域，用视察法求下列边值问题的解。

(1) $\begin{cases}\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = Ay, \quad (x,y) \in D\\ u|_\Gamma = 0, \quad \Gamma: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4} = \dfrac{q}{D} \quad (x,y) \in D\\ u|_\Gamma = 0 \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_\Gamma = 0, \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_\Gamma = 0\end{cases}$

第六章　格林函数法

格林(Green)函数法是物理、力学及工程技术中常用的一种方法，这种方法的优点在于：只要能求出定解问的格林函数，将它代入相应的求解公式，定解问题随之解决。但是，对于一般的区域，求格林函数亦非容易。这就使格林函数法的应用受到了限制。

本章主要对比较规则的、与坐标轴对称的区域的边值问题，讨论了格林函数的解法。对热传导方程和波动方程的初值问题与混合问题的格林函数解法，仅通过举例进行简单介绍。此外，对多维 δ 函数、基本解这一重要概念，也作了简要的叙述。

§6.1　格林公式及其应用

1．格林公式

在研究拉普拉斯方程，建立其解的积分表达式。常要利用格林公式。格林公式是联系曲面积分与三重积分之间的关系——奥斯特洛格拉德斯基-高斯公式的直接推论。

设 Ω 是以足够光滑的曲面 Γ 为边界的有界区域，$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 是在闭区域 $\bar{\Omega}=\Omega+\Gamma$ 上连续、在 Ω 内具有一阶连续偏导数的任意函数，则奥斯特洛格拉德斯基-高斯公式

$$\iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right]\mathrm{d}\Omega$$

$$=\iint\limits_{\Gamma}[P\cos(nx)+Q\cos(ny)+R\cos(nz)]\mathrm{d}S \quad (6.1.1)$$

成立。其中 n 是 Γ 的外法向向量；$\mathrm{d}\Omega$ 是体积元素；$\mathrm{d}S$ 是 Γ 上的面

积元素。

设函数 $u(x,y,z)$ 和 $v(x,y,z)$ 及它们的一阶偏导数在闭区域 $\bar{\Omega}=\Omega+\Gamma$ 上连续，在 Ω 内具有连续的二阶偏导，在式(6.1.1)中令

$$P = u\frac{\partial v}{\partial x} \quad Q = u\frac{\partial v}{\partial y} \quad R = u\frac{\partial v}{\partial z}$$

即得

$$\begin{aligned}&\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right]\mathrm{d}\Omega\\&=\iint_{\Gamma}u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos(\hat{nx})+\frac{\partial v}{\partial y}\cos(\hat{ny})+\frac{\partial v}{\partial z}\cos(\hat{nz})\right)\mathrm{d}S\end{aligned}$$

上式的左端可化为

$$\begin{aligned}&\iiint_{\Omega}u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}\Omega+\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}\Omega\\&=\iiint_{\Omega}u\Delta v\mathrm{d}\Omega+\iiint_{\Omega}\mathrm{grad}u\cdot\mathrm{grad}v\mathrm{d}\Omega\end{aligned}$$

其中

$$\mathrm{grad}u=\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right\}$$

$$\mathrm{grad}v=\left\{\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial z}\right\}$$

分别是函数 u 和 v 的梯度向量、等式的右端是

$$\iint_{\Gamma}u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}S$$

于是我们就得到**格林第一公式**

$$\iiint_{\Omega}u\Delta v\mathrm{d}\Omega=\iint_{\Gamma}u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}S-\iiint_{\Omega}\mathrm{grad}u\cdot\mathrm{grad}v\mathrm{d}\Omega \tag{6.1.2}$$

在式(6.1.2)中，交换函数 u 与 v 的位置得

$$\iiint_{\Omega}v\Delta u\mathrm{d}\Omega=\iint_{\Gamma}v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S-\iiint_{\Omega}\mathrm{grad}v\cdot\mathrm{grad}u\mathrm{d}\Omega \tag{6.1.3}$$

将(6.1.2)减去式(6.1.3)得

$$\iiint\limits_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u)\mathrm{d}\Omega = \iint\limits_{\Gamma} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S \quad (6.1.4)$$

式(6.1.4)称为**格林第二公式**。

2. 格林公式的应用

利用格林公式可以推出调和函数的一些基本性质，所谓调和函数，就是具有二阶连续偏导数且满足拉普拉斯方程的连续函数。

1) 调和函数的积分表达式

考察函数

$$v = \frac{1}{r_{MM_0}} = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} \quad (6.1.5)$$

M_0为区域Ω内的某固定点，我们知道，函数$\frac{1}{r}$除点$M_0(x_0,y_0,z_0)$外，处处满足拉普拉斯方程，即有$\Delta(\frac{1}{r})=0$，这个函数在研究三维拉普拉斯方程中起着重要的作用，称为三维拉普拉斯方程的**基本解**。

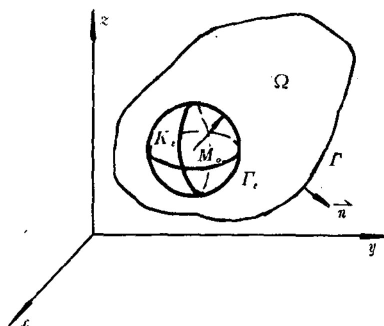


图6-1

在区域Ω内挖去一个以M_0为中心，以充分小的正数ε为半径的小闭球K_ε，它的表面记作Γ_ε(图6-1)、区域$\Omega-K_\varepsilon$的边界$\Gamma+\Gamma_\varepsilon$仍具有格林公式要求的光滑性，对区域$\Omega-K_\varepsilon$应用格林第二公式，取$v=\frac{1}{r}$，得

$$\iiint\limits_{\Omega-k_\varepsilon} [u\Delta(\frac{1}{r}) - \frac{1}{r}\Delta u]\mathrm{d}\Omega$$

$$= \iint\limits_{\Gamma} \left[u\frac{\partial}{\partial n}(\frac{1}{r}) - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]\mathrm{d}S + \iint\limits_{\Gamma_\varepsilon} u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}S - \iint\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S$$

(6.1.6)

因为在 $\Omega-k_\varepsilon$ 内 $\Delta u=0$，$\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=0$。在球面 Γ_ε 上法向量 $\vec{n}$ 与 $\vec{r}$ 方向相反，故有

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\bigg|_{\Gamma_\varepsilon} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\bigg|_{\Gamma_\varepsilon} = \frac{1}{r^2}\bigg|_{\Gamma_\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2}$$

因此

于是 $$\iint\limits_{\Gamma_\varepsilon} u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}S = \frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{\Gamma_\varepsilon} u\mathrm{d}S = 4\pi\overline{u}$$

其中 $\overline{u}$ 是函数 u 在球面 Γ_ε 上的平均值，同理我们有

$$\iint\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S = \frac{1}{\varepsilon}\iint\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S = 4\pi\varepsilon\overline{\frac{\partial u}{\partial n}}$$

这里 $\overline{\frac{\partial u}{\partial n}}$ 是 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 在球面 Γ_ε 上的平均值，于是由式(6.1.6)得

$$\iint\limits_{\Gamma} \left(u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S + 4\pi\overline{u} - 4\pi\varepsilon\overline{\frac{\partial u}{\partial n}} = 0$$

令 $\varepsilon\to0$ 即得调和函数的基本积分公式

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Gamma} \left[u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right) - \frac{1}{r_{M_0M}}\frac{\partial u(M)}{\partial n}\right]\mathrm{d}S_M$$

(6.1.7)

上述基本积分公式指出，在 $\overline{\Omega}=\Omega+\Gamma$ 上有连续一阶偏导数的调和函数 u，在区域内任一点 M_0 的值，可通过积分式(6.1.7)用这个函数及其法向导数在区域边界 Γ 上的数值来表示。

如果 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 在 $\overline{\Omega}$ 之外或在边界 Γ 上，也可用同样的方法推得另外两个式子，把它们合并得

$$\iint_{\Gamma}\left[\frac{1}{r_{M_0M}}\frac{\partial u(M)}{\partial n}-u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right)\right]\mathrm{d}S=\begin{cases}4\pi u(M_0) & M_0\in\Omega\\ 2\pi u(M_0) & M_0\in\Gamma\\ 0 & M_0\overline{\in}\bar{\Omega}\end{cases}\tag{6.1.8}$$

若 $u(x,y,z)$不是调和函数，只要它在 $\bar{\Omega}=\Omega+\Gamma$ 上有一阶连续偏导数，在 Ω 内有二阶连续偏导数且满足泊松方程 $\Delta u=f$，我们可以得到类似的公式

$$u(M_0)=-\frac{1}{4\pi}\iint_{\Gamma}\left[u(M_0)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right)-\frac{1}{r_{M_0M}}\frac{\partial u(M)}{\partial n}\right]\mathrm{d}S-\frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega}\frac{f(M)}{r_{M_0M}}\mathrm{d}\Omega_M$$

2） 调和函数的边界性质

定理1 设函数 $u(x,y,z)$在闭区域 $\bar{\Omega}=\Omega+\Gamma$ 上有一阶连续偏导，在 Ω 内调和，则在边界 Γ 上有

$$\iint_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=0\tag{6.1.9}$$

证： 在格林第二公式(6.1.4)中，取 u 为所给的调和函数，取 $v\equiv 1$，即得等式(6.1.9)

由此定理立即可得牛曼内问题

$$\begin{cases}\Delta u=0\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma}=f\end{cases}$$

有解的必要条件是

$$\iint_{\Gamma}f\mathrm{d}S=0\tag{6.1.10}$$

3） 调和函数的平均值定理

定理2 设函数 $u(M)$在区域 Ω 内是调和的，M_0是 Ω 内的任一点，Γ_a 是以 M_0为中心，a 为半径且完全落在 Ω 内的球面，则下面的公式成立

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2}\iint_{\Gamma_a} u\mathrm{d}S \qquad (6.1.11)$$

证： 将积分公式(6.1.7)应用到以 M_0为球心，a 为半径的球 Γ_a 上(如图6-2)得

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi}\iint_{\Gamma_a}\left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right) - \frac{1}{r_{M_0M}}\frac{\partial u}{\partial n}\right]\mathrm{d}S$$

在 Γ_a 上 $r=a$，由调和函数的边界性质得

$$\iint_{\Gamma_a}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S = \frac{1}{a}\iint_{\Gamma_a}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S = 0$$

注意到在 Γ_a 上 $\vec{r}$ 方向与外法线方向 $\vec{n}$ 一致，故

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\bigg|_{\Gamma_a} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\bigg|_{\Gamma_a} = -\frac{1}{a^2}$$

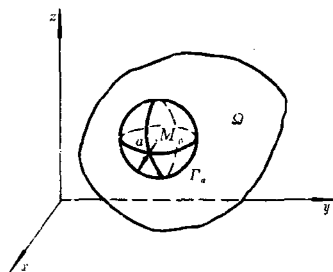


图6-2

于是

$$\iint_{\Gamma_a} u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}S = -\frac{1}{a^2}\iint_{\Gamma_a} u\mathrm{d}S$$

这样，我们就得到了

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2}\iint_{\Gamma_a} u\mathrm{d}S$$

§6.2　δ函数、基本解

基本解是数学物理方程中的一个重要概念。我们利用 δ 函数可以定义方程或初值问题的基本解，利用富里埃变换可以求出基本解，利用基本解又可以构造有界问题的格林函数，利用格林函数就可以求出各种定解问题的解。因此，研究和掌握基本解对于求解数学物理方程是十分重要的。

1. 多维 δ 函数及其性质

类似于一维 δ 函数，可以定义多维 δ 函数。例如三维的情形，设 $M(x,y,z)$，$N(\xi,\eta,\zeta)$是三维空间区域 Ω 内任意两点，N 为一固定点，我们定义三维 δ 函数 $\delta(x-\xi,y-\eta,z-\zeta)$如下：

(1) $$\delta(M-N)=\delta(x-\xi,y-\eta,z-\zeta)=\begin{cases}\infty & M=N\\ 0 & M\neq N\end{cases} \tag{6.2.1}$$

(2) $$\iiint\limits_{\Omega}\delta(M-N)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\begin{cases}1 & N\in\Omega\\ 0 & N\overline{\in}\Omega\end{cases} \tag{6.2.2}$$

(3) $$\iiint\limits_{\Omega}F(x,y,z)\delta(x-\xi,y-\eta,z-\zeta)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=F(\xi,\eta,\zeta) \tag{6.2.3}$$

其中 $F(x,y,z)$是区域 Ω 上的任意连续函数。

它表示单位质量集中于一点 N 的密度函数。

如果 $\delta(x-\xi)$、$\delta(y-\eta)$和 $\delta(z-\zeta)$都是一维 δ 函数，那么我们有

$$\iiint\limits_{\Omega}F(x,y,z)\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)\delta(z-\zeta)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=F(\xi,\eta,\zeta) \tag{6.2.3'}$$

因为式(6.2.3)和式(6.2.3′)对任意连续函数 F 都成立，故得

$$\delta(x-\xi,y-\eta,z-\zeta)=\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)\delta(z-\xi)$$

即三维 δ 函数可以看作三个一维 δ 函数的乘积。

同样可以定义 n 维 δ 函数。

2. 基本解

为了简便，我们用符号 L 表示一个二阶线性偏微分算子。例如

$$L=\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right),L=\left(\frac{\partial}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right),\ L=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

都是二阶线性偏微分算子。

1） 方程 $Lu=f$ 的基本解

设 M、N 为 n 维实空间的点，我们把满足方程

$$Lu = \delta(M-N) = \begin{cases} 0 & M \neq N \\ \infty & M = N \end{cases} \tag{6.2.4}$$

的解 $U(N,M)$ 称为方程 $Lu=f$ 的基本解，有时也称为 $Lu=0$ 的基本解。

函数 $U(N,M)$ 在 $M\neq N$ 时，满足齐次方程 $Lu=0$ 即 $LU(N,M)=0$。对任意充分光滑的函数 $f(N)$，

$$u(N) = \int_{R^n} U(N,M)f(M)\mathrm{d}M$$

满足 $Lu=f(N)$，事实上

$$\begin{aligned} Lu(N) &= \int_{R^n} LU(N,M)f(M)\mathrm{d}M \\ &= \int_{R^n} \delta(M-N)f(M)\mathrm{d}M = f(N) \end{aligned}$$

其中 R^n 是 n 维实空间。

现将方程式(6.2.4)的基本解分列如下：

(1) $\Delta u=0$(或 $\Delta u=f$)的基本解

二维：

$$U(N,M) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{NM}} \tag{6.2.5}$$

三维

$$U(N,M) = \frac{1}{4\pi r_{NM}} \tag{6.2.6}$$

(2) 热传导方程的基本解

$$U(\xi,t;x,\tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left[-\dfrac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] & t \geqslant \tau \\ 0 & t < \tau \end{cases} \tag{6.2.7}$$

(3) 波动方程的基本解

一维 $U(\xi,t;x,\tau)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a} & |x-\xi|<a(t-\tau) \quad t\geqslant\tau \\ 0 & |x-\xi|>a(t-\tau) \quad t<\tau\end{cases}$

(6.2.8)

二维 $U(\xi,\eta,t;x,y,\tau)=$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi a[a^2(t-\tau)^2-\xi^2]^{\frac{1}{2}}} & r=[(x-\xi)^2+(y-n)^2]^{\frac{1}{2}}\leqslant a(t-v) \quad t\geqslant\tau \\ 0 & r>a(t-\tau) \quad t<\tau\end{cases} \tag{6.2.9}$$

三维

$$U(\xi,\eta,\zeta,t;x,y,z,\tau)=\begin{cases}\dfrac{\delta[r-a(t-\tau)]}{4\pi ar} & r\leqslant a(t-\tau) \quad t\geqslant\tau \\ 0 & r>a(t-\tau) \quad t<\tau\end{cases}$$

(6.2.10)

2) 柯西问题的基本解

(1) 称满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\Delta u=0 \\ u|_{t=0}=0 \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=\delta(N-M)\end{cases}$$

的解,为波动方程柯西问题的基本解,其形式为

一维 $U(\xi-x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a} & |\xi-x|<at \\ 0 & |\xi-x|>at\end{cases}$ (6.2.11)

二维 $U(\xi-x,\eta-y,t)$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi a\sqrt{a^2t^2-r^2}} & r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} \quad r\leqslant at \\ 0 & r>at\end{cases}$$

(6.2.12)

三维 $U(\xi-x,\eta-y,\zeta-z,t)=\dfrac{\delta(r-at)}{4\pi ar}$

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} \quad (6.2.13)$$

(2) 称满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(x,0) = \delta(\xi - x) \end{cases}$$

的解为热传导方程柯西问题的基本解，它的形式是

$$U(\xi - x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left[-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t} \right] \quad (6.2.14)$$

用同样方法可以定义其它问题的基本解。

关于基本解的求法，将在第七章中讲述。

§6.3 格林函数及其性质

格林函数，有时也称源函数，是数学物理方程中的一个重要概念。在本节中我们将引进拉普拉斯方程第一边值问题的格林函数概念，然后，叙述一些格林函数的性质。

对于在区域 Ω 内调和，在 $\bar{\Omega} = \Omega + \Gamma$ 上有一阶连续偏导数的函数 u，已知有公式

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma} \left[u \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{M_0 M}} \right) - \frac{1}{r_{M_0 M}} \frac{\partial u}{\partial n} \right] \mathrm{d}S$$

其中 $M_0 \in \Omega$，这个公式用函数 u 及其法向导数 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 在边界 Γ 的数值把函数 u 在区域内部的数值表示了出来。这就自然使我们想到：能否用它来求解边值问题？由于公式中含有 u，又包含有 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 在 Γ 上的值，所以不能直接用来求解拉普拉斯方程的狄利克莱问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & M \in \Omega \\ u|_{\Gamma} = f(M) & M \in \Gamma \end{cases} \quad (6.3.1)$$

或牛曼问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad M \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma = f(M) \quad M \in \Gamma \end{cases} \tag{6.3.2}$$

例如对狄利克莱问题(6.3.1)，u 在 Γ 上的值是已给定的，但$\dfrac{\partial u}{\partial n}$在 Γ 上的值就不知道。那么，除了给定 u 在 Γ 上的值外，是否还能任意再给定$\dfrac{\partial u}{\partial n}$在 Γ 上的值呢？这是不可能的。因为按照解的适定性理论（第九章）狄利 克莱问题的解是唯一的，为了克服这个困难，就必须设法消去公式中的$\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma$，这就需要引进格林函数的概念。

在考察公式(6.1.7)的同时，如果我们另取一光滑函数 $g(M,M_0)$，它在区域 Ω 内关于变量 M 满足拉普拉斯方程，我们在格林公式(6.1.4)中取 u 是式(6.3.1)的解，$v=g(M,M_0)$。这样便得到

$$0 = \iint_\Gamma \left(u\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S \tag{6.3.3}$$

将式(6.1.7)减去式(6.3.3)得

$$u(M_0) = \iint_\Gamma \left[\left(\frac{1}{4\pi r_{MM_0}} + g\right)\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{4\pi r_{MM_0}} + g\right)\right]\mathrm{d}S \tag{6.3.4}$$

为了去掉上式右端未知项$\dfrac{\partial u}{\partial n}$，我们选取 $g(M,M_0)$，使得

$$\left(\frac{1}{4\pi r_{MM_0}} + g\right)\Bigg|_\Gamma = 0\text{，即 } g|_\Gamma = -\frac{1}{4\pi r_{MM_0}}$$

记 $G(M,M_0)=\dfrac{1}{4\pi r_{MM_0}}+g(M,M_0)$，则式(6.3.1)的解就可表为

$$u(M_0) = -\iint_\Gamma f(M_0)\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}S \tag{6.3.5}$$

其中

$$\begin{cases} G(M,M_0) = \dfrac{1}{4\pi r_{MM_0}} + g(M,M_0) & (6.3.6) \\ G|_\Gamma = 0 & (6.3.7) \end{cases}$$

由式(6.3.6)、式(6.3.7)定义的函数 $G(M,M_0)$就称为拉普拉斯方程第一边值问题的格林函数或称为狄利克莱问题的源函数。

由上述知，要知区域 Ω 上的格林函数，必须解一个特殊的狄利克莱问题

$$\begin{cases} \Delta g = 0 \\ g|_\Gamma = -\dfrac{1}{4\pi r} \end{cases} \qquad (6.3.8)$$

引入格林函数的重要意义在于把拉普拉斯方程的边值问题式(6.3.1)归结为求一个特定的边值问题式(6.3.8)，对于特殊区域，这样的特定边值问题可求得解的具体表达式。在一般情况下，虽不能得出格林函数的表达式，但由于它只依赖于区域，这在理论研究上也带来一定的方便。

格林函数的物理意义为：某导体表面接地，在内部点 M_0处放置一单位点电荷，那么在导体内部所产生的电位分布就是格林函数。

下面叙述格林函数的一些性质，其证明可参考理科的教材或参考书，此处从略。

性质1 格林函数 $G(M,M_0)$在 Ω 内除 $M=M_0$外，处处是调和的；当 $M\to M_0$时，$G(M,M_0)$趋于无穷大，其阶数与$\dfrac{1}{r_{MM_0}}$相同。

性质2 在边界 Γ 上，格林函数 $G(M,M_0)$恒等于零。

性质3 在区域 Ω 内成立不等式

$$0 < G(M,M_0) < \frac{1}{4\pi r_{MM_0}}$$

性质4 格林函数 $G(M,M_0)$关于自变量 M 及参变量 M_0之间成立着对称性，即对于区域 Ω 内任意不同的两点 M_1和 M_2有

$$G(M_1, M_2) = G(M_2, M_1)$$

性质5 $\iint\limits_{\Gamma} \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n} \mathrm{d}S = -1$

从式(6.3.6)知，拉普拉斯方程或泊松方程的第一边值问题的格林函数是由两部分组成的。第一部分是方程的基本解 $U(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}}$。第二部分是式(6.3.8)的解，即在 Ω 内调和，在边界 Γ 上它与基本解的和等于零。

例1 求单位圆内的拉普拉斯方程的狄利克莱问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_\Gamma = Axy \end{cases}$$

的解。

解：由基本解式(6.2.5)知

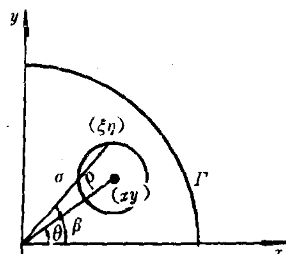


图6-3

$$U = -\frac{1}{2\pi}\ln r = -\frac{1}{4\pi}\ln r^2$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\ln[\sigma^2 + \rho^2 - 2\sigma\rho\cos(\beta - \theta)]$$

引入极坐标，如图6-3。

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \begin{cases} \xi = \sigma\cos\beta \\ \eta = \sigma\sin\beta \end{cases}$$

为求格林函数，还需解定解问题

$$\begin{cases} \Delta g = 0 \\ g|_\Gamma = -U \end{cases} \tag{6.3.8'}$$

问题式(6.3.8)的解为

$$g = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k (a_k \cos k\beta + b_k \sin k\beta)$$

在单位圆周 Γ 上有

$$g = -U = \frac{1}{4\pi}\ln[1 + \rho^2 - 2\rho\cos(\beta - \theta)]$$

利用恒等式

$$\ln[1+\rho^2-2\rho\cos(\beta-\theta)]=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^k\cos k(\beta-\theta)}{k}$$

并比较两边 $\sin k\beta$、$\cos k\beta$ 的系数得

$$a_k=-\frac{\rho^k}{2\pi k}\cos k\theta \quad b_k=-\frac{\rho^k}{2\pi k}\sin k\theta$$

从而得

$$\begin{aligned}g(\rho,\theta;\sigma,\beta)&=-\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\sigma\rho)^k}{k}\cos k(\beta-\theta)\\&=\frac{1}{4\pi}\ln[1+(\sigma\rho)^2-2(\sigma\rho)\cos(\beta-\theta)]\end{aligned}$$

从而得到问题的格林函数

$$\begin{aligned}G(\rho,\theta;\sigma,\beta)&=U+g\\&=-\frac{1}{4\pi}\ln[\sigma^2+\rho^2-2\sigma\rho\cos(\beta-\theta)]\\&\quad+\frac{1}{4\pi}\ln[1+(\sigma\rho)^2-2\sigma\rho\cos(\beta-\theta)]\\&=-\frac{1}{4\pi}\ln[\sigma^2+\rho^2-2\sigma\rho\cos(\beta-\theta)]\\&\quad+\frac{1}{4\pi}\ln[\frac{1}{\sigma^2}+\rho^2-\frac{2\rho}{\sigma}\cos(\beta-\theta)]\\&\quad-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\sigma}\end{aligned}$$

故有 $\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\Gamma}=\left.\frac{\partial G}{\partial \sigma}\right|_{\sigma=1}=-\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\beta-\theta)}$

由式(6.3.5)得

$$\begin{aligned}u(\rho,\theta)&=-\int_{\Gamma}\frac{\partial G}{\partial n}f\mathrm{d}S\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\beta-\theta)}f(\beta)\mathrm{d}\beta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\beta-\theta)}\cos\beta\sin\beta\mathrm{d}\beta\end{aligned}$$

例2 导出泊松方程的狄利克莱问题

$$\begin{cases}\Delta u = -F & \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ u|_{\Gamma} = f\end{cases} \tag{6.3.9}$$

的解式为

$$u(\xi,\eta) = \iint_{\Omega} G(\xi,\eta;x,y)F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_{\Gamma} f\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}S \tag{6.3.10}$$

解：在格林第二公式(6.1.4)中，取式中的 $u(x,y)=G(x,y;\xi,\eta)$，取式中的 v 为(6.3.9)的解 $u(x,y)$ 得

$$\iint_{\Omega}(G\Delta u - u\Delta G)\mathrm{d}\Omega = \int_{\Gamma}\left(G\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial G}{\partial n}\right)\mathrm{d}S$$

而在 Ω 内有 $\Delta u = F(x,y)$ 和 $-\Delta G = \delta(x-\xi,y-\eta)$

于是

$$\iint_{\Omega}[-G(x,y;\xi,\eta)F(x,y) + u(x,y)\delta(x-\xi,y-\eta)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_{\Gamma}[G(x,y;\xi,\eta)\frac{\partial u}{\partial n} - u(x,y)\frac{\partial G}{\partial n}]\mathrm{d}S$$

由于在 Γ 上 $G=0,u=f$，由于 $G(M,M_0)=G(M_0,M)$ 并注意到 δ 函数的性质，得

$$u(\xi,\eta) = \iint_{\Omega} G(\xi,\eta;x,y)F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_{\Gamma} f\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}S$$

§6.4 静电源像法

由格林函数的物理意义，使我们设想用物理学中的静电源像法来求格林函数，静电源像法的思想是：设想 $\overline{\Omega}$ 外某点处也有一个点电荷，它在 Ω 内的电位就等于 Γ 内侧感应电

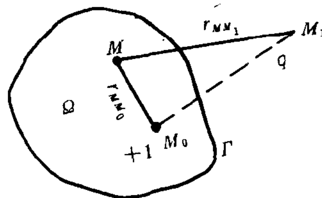


图6-4

荷所产生的电位。点电荷 M_0 与点电荷 M_1 所产生的电位在 Ω 的边界 Γ 上恰巧抵消，于是格林函数就是 M_0 和 M_1 这两点的点电荷所产生的电位之和(图6-4)。容易想像，M_1 点与 M_0 点关于边界 Γ 应具有某种对称性。具体作法是

(1) 对应于 Ω 内的一点 M_0，寻求关于 Ω 的边界 Γ 对称的 $\bar{\Omega}$ 外的点 M_1。

(2) 在 M_1 点置电量为 q 的负电荷，使得在 Γ 上产生的电位 $-v=-\left.\frac{q}{4\pi r_{MM_1}}\right|_\Gamma$ 与 M_0 处单位正电荷在 Γ 上产生的电位 $\left.\frac{1}{4\pi r_{MM_0}}\right|_\Gamma$ 相抵消，即有

$$\left.\frac{1}{4\pi r_{MM_0}}\right|_\Gamma-\left.\frac{q}{4\pi r_{MM_1}}\right|_\Gamma=0$$

从而确定电量 $q=\left.\frac{r_{MM_1}}{r_{MM_0}}\right|_\Gamma$ (6.4.1)

(3) 由此得到格林函数

$$G(M,M_0)=\frac{1}{4\pi r_{MM_0}}-\frac{q}{4\pi r_{MM_1}} \tag{6.4.2}$$

本节讨论用静电源像法求几种特殊区域的格林函数，及拉普拉斯方程和泊松方程的狄利克莱问题的解。

1. 圆域的格林函数及狄利克莱问题的解

1) 求圆的格林函数 $G(M,M_0)$，$M(\rho,\theta)$，$M_0(\rho_0\theta_0)$

由于在 M_0 点处置一单位正电荷所产生的电场的电位为 $\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{M_0M}}$，因此，现在的关键问题是找一个在圆内处处调和的函数 $g(M,M_0)$ 图6-5，使得

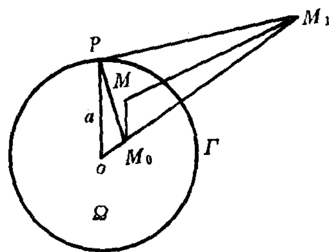


图6-5

$$G(M,M_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{M_0M}}+g(M,M_0) \qquad (6.4.3)$$

在圆周 Γ 上为零。

用镜电源像法找 $g(M,M_0)$. 在所给圆域 Ω 内任取一点 $M_0(\rho,\theta_0)$. 连 OM_0并延长至 M_1使 $r_{OM_0}\cdot r_{OM_1}=a^2$，点 M_1称为点 M_0关于圆周 Γ 的反演点或对称点，记 $r_{OM_0}=\rho_0, r_{OM_1}=\rho_1$，则有

$$\rho_0\cdot\rho_1=a^2 \quad 或 \quad \frac{\rho_0}{a}=\frac{a}{\rho_1}$$

为了求出 $g(M,M_0)$，在 M_0点放置单位正电荷，在 M_1点放置 q 单位负电荷，适当选择 q 的值，使得这两个电荷所产生的静电场的电位在圆周 Γ 上互相抵消，即

$$\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{PM_0}}=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{q}{r_{PM_1}} \quad (P\in\Gamma)$$

由此得出 $q=\frac{r_{PM_1}}{r_{PM_0}}$，又因$\triangle OM_1P\sim\triangle OM_0P$，故有

$$q=\frac{r_{PM_1}}{r_{PM_0}}=\frac{a}{\rho_0}$$

即只要在 M_1点处放置$\frac{a}{\rho_0}$单位负电荷，由它所形成的电场的电位

$$g(M,M_0)=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{a}{\rho_0r_{MM_0}} \qquad (6.4.4)$$

不仅在 Ω 内处处是调和的，在 $\overline{\Omega}=\Omega+\Gamma$ 上一次连续可微，而且在 Γ 上满足

$$\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MM_0}}\bigg|_\Gamma=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{a}{\rho_0r_{MM_0}}\bigg|_\Gamma$$

故圆域的格林函数为

$$G(M,M_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MM_0}}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{a}{\rho_0r_{MM_0}} \qquad (6.4.5)$$

注意到
$$\frac{1}{r_{M_0M}}=\frac{1}{\sqrt{\rho_0^2+\rho^2-2\rho_0\rho\cos\gamma}}$$

$$\frac{1}{r_{M_1M}} = \frac{1}{\sqrt{\rho_1^2 + \rho^2 - 2\rho_1\rho\cos\gamma}}$$

其中 $\rho=r_{OM}$,γ 是 OM_0与 OM 的夹角,在极坐标系下,圆域的格林函数

$$G(\rho,\theta;\rho_0,\theta_0) = \frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{\sqrt{\rho_0^2 + \rho^2 - 2\rho_0\rho\cos(\theta_0 - \theta)}} - \ln\frac{a}{\rho_0}\frac{1}{\sqrt{\rho_1^2 + \rho^2 - 2\rho_1\rho\cos(\theta_0 - \theta)}}\right]$$

2)利用格林函数求圆域拉普拉斯方程的狄利克莱问题的解。先求

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\rho=a} = \left.\frac{\partial G}{\partial \rho}\right|_{\rho=a} = \frac{\partial}{\partial\rho}\left\{\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{\sqrt{\rho_0^2+\rho^2-2\rho_0\rho\cos(\theta_0-\theta)}} - \ln\frac{a}{\sqrt{\rho_0^2\rho_1^2+\rho_0^2\rho^2-2\rho_0^2\rho_1\rho\cos(\theta_0-\theta)}}\right]\right\}\Bigg|_{\rho=a}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\rho-\rho_0\cos(\theta_0-\theta)}{\rho^2+\rho_0^2-2\rho_0\rho\cos(\theta_0-\theta)} - \frac{\rho_0^2\rho-a^2\rho_0\cos(\theta_0-\theta)}{\rho_0^2\rho^2-2a^2\rho_0\rho\cos(\theta_0-\theta)+a^4}\right\}\Bigg|_{\rho=a}$$

$$=-\frac{1}{2\pi a}\cdot\frac{a^2-\rho_0^2}{a^2-2a\rho_0\cos(\theta_0-\theta)+\rho_0^2}$$

将上式代入求解公式 $u(M_0) = -\int_\Gamma \frac{\partial G}{\partial n}f(M)\mathrm{d}S$

得圆域狄利克莱问题的解为

$$u(\rho_0,\theta_0) = \frac{1}{2\pi a}\int_\Gamma \frac{a^2 - \rho_0^2}{a^2 - 2a\rho_0\cos(\theta_0 - \theta) + \rho_0^2}f(\theta)\mathrm{d}S$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(a^2 - \rho_0^2)f(\theta)}{a^2 - 2a\rho_0\cos(\theta - \theta_0) + \rho_0^2}\mathrm{d}\theta \qquad (6.4.6)$$

2. 上半平面的格林函数及狄利克莱问题的解

1) 求格林函数

设 $M_0(x_0,y_0)$为上半平面内的一点,关于 $y=0$的对称点为 $M_1(x_0,-y_0)$,于是可构造格林函数为

$$G(M,M_0)=\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{r_{M_0M}}-\ln\frac{1}{r_{M_1M}}\right]$$

$$=\frac{1}{4\pi}\{-\ln[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]$$

$$-\ln[(x-x_0)^2+(y+y_0)^2]\} \qquad (6.4.7)$$

显然有 $\qquad G|_{y=0}=0$

2)求解泊松方程在上半平面 $y>0$的狄利克莱问题的解

$$\begin{cases}\Delta u=-F & \text{在 } y>0 \text{ 内}\\ u|_{y=0}=f\end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\Gamma}=-\left.\frac{\partial G}{\partial y}\right|_{y=0}$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\left[-\frac{2(y-y_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right.$$

$$\left.-\frac{2(y+y_0)}{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}\right]_{y=0}$$

$$=\frac{y_0}{\pi}\frac{1}{(x-x_0)^2+y_0^2}$$

由解式(6.3.10)得

$$u(x_0,y_0)=\frac{y_0}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)}{(x-x_0)^2+y_0^2}\mathrm{d}x$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\ln\frac{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (6.4.8)$$

3.四分之一平面的格林函数及狄利克莱问题的解

试求解四分之一无限平面的洛平问题(图6-6)

$$\begin{cases}\Delta u=F(x,y)\\ \text{于 } x>0\ y>0 \text{ 内}\\ u|_{x=0}=f(y)\\ u_y|_{y=0}=g(x)\end{cases}$$

点原 $M_0(x_0,y_0)$的三个像

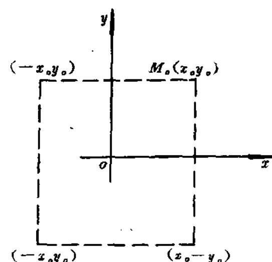


图6-6

点为$(-x_0y_0)$，$(-x_0-y_0)$，(x_0-y_0)。根据静电源像法，格林函数是源点与像点产生的电位之和，通过观察能够直接构造格林函数

$$G=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2][(x-x_0)^2+(y+y_0)^2]}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2][(x+x_0)^2+(y+y_0)^2]} \tag{6.4.9}$$

不难验证，这个函数除M_0点外，满足$\Delta G=0$，且$G|_{x=0}=0$，$G_y|_{y=0}=0$。因由公式(6.3.10)得解为

$$\begin{aligned}u(x_0y_0)&=\iint_\Omega GF\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_\Gamma\left(G\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial G}{\partial n}\right)\mathrm{d}S\\&=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}GF\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_0^{+\infty}g(x)G(x,o;x_0y_0)\mathrm{d}x\\&\quad-\int_0^{+\infty}f(y)G_x(0,y;x_0y_0)\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{6.4.10}$$

4. 半圆域的格林函数及狄利克莱问题的解

试求解半圆上狄利克莱问题

$$\begin{cases}\Delta u=0 & \Omega: x^2+y^2<a \quad y>0\\ u|_{\rho=1}=f(\theta) & \Gamma_1:\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi\\ u|_{y=0}=g(x) & \Gamma_2:\ |x|<a\end{cases}$$

1）求半圆域Ω的格林函数

求这个格林函数的关键在于：寻求一个在Ω内调和，在Γ_1上和Γ_2上都等于$-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{PM}}$的函数$g(P,M_0)$。为此，我们先考察半圆域$\Omega$内任一点$M_0$关于$x$轴对称的点$M_2$处关于圆的格林函数

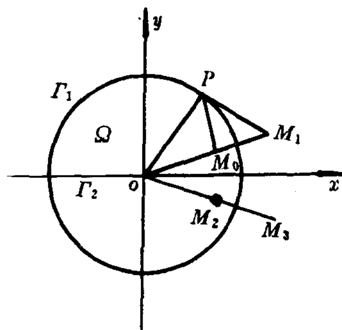


图6-7

$$G_1(P,M_2)=\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{r_{PM_2}}-\ln\frac{a}{\rho r_{PM_3}}\right]$$

其中 M_3是 M_2关于圆的反演点（对称点）。见图6-7。

当 P 在上半圆周上时，显然有

$$G_1(P,M_2)=0$$

当 P 在 x 轴上（$|x|<a$）上时，

$$G_1(P,M_2)=G_1(P,M_0)$$

如是，令

$$G(P,M_0)=G_1(P,M_0)-G_1(P,M_2)$$

则 $G(P,M_0)$就是所要求的。关于上半圆的格林函数，即

$$\begin{aligned}G(P,M_0)&=\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{r_{PM_0}}-\ln\frac{a}{\rho r_{PM_1}}-\ln\frac{1}{r_{PM_2}}+\ln\frac{a}{\rho r_{PM_3}}\right]\\&=\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\right.\\&\quad-\ln\frac{a}{\rho\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}}\\&\quad-\ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\\&\quad\left.+\ln\frac{a}{\rho\sqrt{(x-x_1)^2+(y+y_1)^2}}\right]\end{aligned}\tag{6.4.11}$$

2）求上半圆狄利克莱问题的解

$$\left.\frac{\partial G(P,M_0)}{\partial n}\right|_{\rho=a}=\left.\frac{\partial G_1(P,M_0)}{\partial n}\right|_{\rho=a}-\left.\frac{\partial G_1(P,M_2)}{\partial n}\right|_{\rho=a}$$

而 $$\left.\frac{\partial G_1(P,M_0)}{\partial n}\right|_{\rho=a}=-\frac{1}{2\pi a}\cdot\frac{a^2-\rho_0^2}{a^2-2a\rho_0\cos(\theta_0-\theta)+\rho_0^2}$$

注意到 oM_2的幅角是$-\theta$，由对称性有

$$\left.\frac{\partial G_1(P,M_2)}{\partial n}\right|_{\rho=a}=-\frac{1}{2\pi a}\cdot\frac{a^2-\rho_0^2}{a^2-2a\rho_0\cos(\theta_0+\theta)+\rho_0^2}$$

故

$$\left.\frac{\partial G(P,M_0)}{\partial n}\right|_{\rho=a}$$

$$=-\frac{1}{2\pi a}\left[\frac{a^2-\rho_0^2}{a^2-2a\rho_0\cos(\theta_0-\theta)+\rho_0^2}-\frac{a^2-\rho_0^2}{a^2-2a\rho_0\cos(\theta_0+\theta)+\rho_0^2}\right]$$

$$\left.\frac{\partial G(P,M_0)}{\partial n}\right|_{y=0}=-\left.\frac{\partial G(P,M_0)}{\partial y}\right|_{y=0}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{-y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}+\frac{y_1}{(x-x_1)^2+y_1^2}-\frac{y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}+\frac{y_1}{(x-x_1)^2+y_1^2}\right]$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left[\frac{y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}-\frac{y_1}{(x-x_1)^2+y_1^2}\right]$$

因为 $\rho_0\rho=a^2$，有$\frac{x_0}{\rho_0}=\frac{x_1}{\rho},\frac{y_0}{\rho_0}=\frac{y_1}{\rho}$，故有

$$x_1=\frac{a^2}{\rho_0^2}x_0,\quad y_1=\frac{a^2}{\rho_0^2}y_0,$$ 注意到 $\mathrm{d}S=a\mathrm{d}\theta$，则

$$u(x_0y_0)=u(\rho_0\theta_0)=-\int_{\Gamma_1+\Gamma_2}\frac{\partial G}{\partial n}u\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{a^2-\rho_0^2}{a^2+\rho_0^2-2a\rho_0\cos(\theta-\theta_0)}-\frac{a^2-\rho_0^2}{a^2+\rho_0^2-2a\rho_0\cos(\theta_0+\theta)}\right]f(\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\left[\frac{y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}-\frac{y_1}{(x-x_1)^2+y_1^2}\right]g(x)\mathrm{d}x \quad (6.4.12)$$

其中 $x_1=\frac{a^2}{\rho_0^2}x_0, y_1=\frac{a^2}{\rho_0^2}y_0$，$\rho_0^2=x_0^2+y_0^2$，$M_0$ 是 Ω 内的任意点。

如果要求四分之一圆的格林函数，设 M_0是第一象限内的任一点，考 M_0关于 y 轴的对称点 $\overline{M}$，由于我们已求出上半圆的格林函数 $G(P,M_0)$则四分之一圆的格林函数是

$$G_2(P,M_0)=G(P,M_0)-G(P,\overline{M})$$

5. 半空间区域的格林函数及狄利克莱问题的解

在这段中，我们讨论上半空间($z\geqslant0$)内的拉普拉斯方程的狄利克莱问题，即求函数 $u(x,y,z)$，使它满足

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 & z > 0 \quad -\infty < x \quad y < +\infty \\ u|_{z=0} = f(x,y) & -\infty < x \quad y < +\infty \\ \lim\limits_{\rho \to 0} u(x,y,z) = 0 & z > 0 \quad \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \end{cases}$$

(1) 求上半空间区域的格林函数

在上半空间 $z>0$ 内某点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 关于平面 $z=0$ 的对称点是 $M_1(x_0,y_0,-z_0)$(图6-8)。由式(6.4.1)

$$q = \frac{r_{MM_1}}{r_{MM_0}}\bigg|_{\Gamma} = \frac{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}\Bigg|_{z=0}$$

$$= 1$$

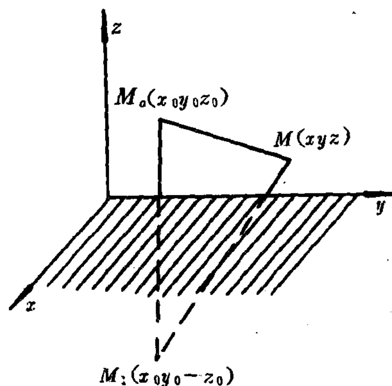


图6-8

故按式(6.4.2)得格林函数

$$G(M,M_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{MM_0}} - \frac{1}{r_{MM_1}}\right) \quad z \geqslant 0$$

或

$$G(M,M_0) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}\right.$$

$$-\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}\Bigg] \tag{6.4.13}$$

（2）求上半空间狄利克莱问题的解

由于在平面 $z=0$ 的外法线方向是 oz 轴的负向，故有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial n}\bigg|_{z=0} &= -\frac{\partial G}{\partial z}\bigg|_{z=0} \\
&= -\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{-(z-z_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}\right. \\
&\quad \left.-\frac{-(z+z_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}\right\}\Bigg|_{z=0} \\
&= -\frac{1}{2\pi}\frac{z_0}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2]^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

将它代入公式

$$u(M_0) = -\iint_\Gamma f(M)\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}S$$

得所求狄利克莱问题的解为

$$u(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z_0 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2]^{\frac{3}{2}}} \tag{6.4.14}$$

6. 球域的格林函数及狄利克莱问题的解

1）求格林函数

设 M_0 是球内一点，M_1 是 M_0 关于球面 Γ 的反演点，P 为球面 Γ 上的点，如图6-9。

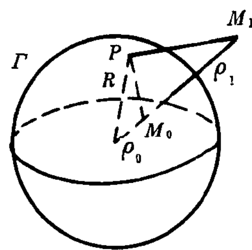


图6-9

根据式(6.4.1)有

$$q = \frac{r_{MM_1}}{r_{MM_0}}\bigg|_\Gamma = \frac{r_{PM_1}}{r_{PM_0}}$$

由于 $\triangle OM_1P \sim \triangle OM_0P$，所以

$$q = \frac{r_{PM_1}}{r_{PM_0}} = \frac{R}{\rho_0}$$

从而球域上的格林函数是

$$G(M,M_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{MM_0}} - \frac{R}{\rho r_{MM_1}}\right)$$

注意到

$$r_{MM_0} = \sqrt{\rho_0^2 + \rho^2 - 2\rho_0\rho\cos\gamma}, r_{MM_1} = \sqrt{\rho_1^2 + \rho^2 - 2\rho_1\rho\cos\gamma}$$

其中 $\rho = r_{OM}$,γ 是 OM_0 与 OM 的夹角,并利用 $\rho_0\rho_1 = R^2$,上述格林函数又可表成

$$G(M,M_0) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{\rho_0^2 + \rho^2 - 2\rho_0\rho\cos\gamma}} - \frac{R}{\sqrt{\rho^2\rho_0^2 - 2R^2\rho\rho_0\cos\gamma + R^4}}\right] \tag{6.4.15}$$

2) 求球域内狄利克莱问题的解

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\Gamma} = \left.\frac{\partial G}{\partial \rho}\right|_{\rho=R} = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{-(\rho - \rho_0\cos\gamma)}{[\rho_0^2 + \rho^2 - 2\rho_0\rho\cos\gamma]^{\frac{3}{2}}} - \frac{-(\rho_0^2\rho - R^2\rho_0\cos\gamma)R}{[\rho_0^2\rho^2 - 2R^2\rho_0\rho\cos\gamma + R^4]^{\frac{3}{2}}}\right]\Bigg|_{\rho=R}$$

$$= \frac{-1}{4\pi R}\cdot\frac{R^2 - \rho_0^2}{[R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0\cos\gamma]^{\frac{3}{2}}}$$

由此得球内狄利克莱问题的解为

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R}\iint_{\Gamma}\frac{R^2 - \rho_0^2}{[R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0\cos\gamma]^{\frac{3}{2}}}f(S)\mathrm{d}S \tag{6.4.16}$$

在球坐标系下,$M_0(\rho_0,\theta_0,\varphi_0)$,球面上的点的坐标 $M(R,\theta,\varphi)$'

因为

$$\overrightarrow{OM_0} = \{\sin\theta_0\cos\varphi_0, \sin\theta_0\sin\varphi_0, \cos\theta_0\}$$

$$\overrightarrow{OM} = \{\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta\}$$

故它们夹角余弦是

$$\cos\gamma = \cos\theta_0\cos\theta + \sin\theta_0\sin\theta\cos(\varphi - \varphi_0)$$

于是式(6.4.16)又可写成

$$u(R\theta_0\varphi_0) = \frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(R,\theta,\varphi)\frac{R^2 - \rho_0^2}{[R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0\cos\gamma]^{\frac{3}{2}}}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \tag{6.4.17}$$

式(6.4.16)、式(6.4.17)都称为球的泊松公式。

以上所得到的解的表达式，都是假定解存在的条件下获得的，称为形式解，不难验证，在 f 满一定的光滑性条件时，所得 的形式解确是狄利克莱问题的解。

应用复变函数的保角变换法，将能使许多不规则的区域变换成上半平面或单位圆的内部区域。所以，将保角变换法结合起来，就能扩大静电源像法的使用范围。

§6.5 热传导方程与波动方程的格林函数法

在这一节中，我们简单介绍热传导方程与弦振动方程的格林函数法，而且采用直接给出各种方程定解问题的格林函数，及用格林函数求定问题的解的公式，然后通过举例说明求解的具体方法。

1. 热传导方程的格林函数法

1)一维 无界空间的格林函数(基本解)

定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial t} - a^2\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \delta(x - \xi)\delta(t - \tau) \\ G(x,t;\xi,\tau)|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

的解：即

$$G(x,t;\xi,\tau) = U(x,t;\xi,\tau)$$

$$
=\begin{cases}\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left[-\dfrac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] & t>\tau \\ 0 & t<\tau\end{cases} \tag{6.5.1}
$$

2)定解问题

$$
\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t) \\ u|_{t=0}=0\end{cases}
$$

的解,用格林函数表示为

$$
u(x,t)=\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\tau)G(x,t;\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau
$$

$$
=\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\tau)\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau \tag{6.5.2}
$$

3)有界空间的格林函数

定解问题

$$
\begin{cases}\dfrac{\partial G}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}=\delta(x-\xi)\delta(t-\tau) \\ G|_{x=0}=0,\ G|_{x=l}=0 \\ G|_{t=0}=0\end{cases}
$$

的解。即

$$
G(x,t;\xi,\tau)=\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\exp\left[-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2(t-\tau)\right]\sin\frac{k\pi\xi}{l}\sin\frac{k\pi x}{l} \tag{6.5.3}
$$

4)有界空间第一类齐次边界条件下的热传导方程的定解问题

$$
\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t) & 0<x<l\quad t>0 \\ u|_{x=0}=u|_{l=0}=0 \\ u|_{t=0}=0\end{cases}
$$

的解,可用格林函数表示为

$$
u(x,t)=\int_0^t\int_0^l f(\xi,\tau)G(x,t;\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau \tag{6.5.4}
$$

例1 求定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=A\sin\omega t\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=0\quad \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}=0\\ u|_{t=0}=0\end{cases}$$

解：由附录表Ⅳ查得

$$G(x,t;\xi,\tau)=\frac{1}{l}+\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\exp\left[-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2(t-\tau)\right]\cos\frac{k\pi}{l}x\cos\frac{k\pi}{l}\xi$$

代入式(6.5.4)得

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\int_0^t\int_0^l f(\xi,\tau)G(x,t;\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\\&=\int_0^t\int_0^l A\sin\omega\tau\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau+\frac{2A}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\exp\left[-(\frac{k\pi a^2}{l})^2t\right]\\&\quad\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}\int_0^t\exp\left[\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2\tau\right]\sin(\omega\tau)\mathrm{d}\tau\int_0^l\cos\frac{k\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi\\&=\frac{A}{\omega}(1-\cos\omega\tau)\end{aligned}$$

2.弦振动方程的格林函数法

1)一维无界空间有源波动问题的格林函数，即基本解。

定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 G}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}=\delta(x-\xi)(t-\tau)\\ G|_{t=0}=0\quad \dfrac{\partial G}{\partial t}\Big|_{t=0}=0\end{cases}$$

的解.

$$\begin{aligned}G(x,t;\xi,\tau)&=U(x,t;\xi,\tau)\\&=\frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\delta(x_1-\xi)\mathrm{d}x_1\end{aligned}$$

$$=\begin{cases}0, & \xi < x - a(t-\tau) \text{ 或 } x + a(t-\tau) < \xi \\ \dfrac{1}{2a}, & x - a(t-\tau) < \xi < x + a(t-\tau)\end{cases}$$

(6.5.5)

2)定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) & -\infty < x < +\infty \quad t > 0 \\ u|_{t=0} = 0 \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0\end{cases}$$

的解可表为

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\tau) G(x,t;\xi,\tau) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\tau$$

$$= \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau) \frac{1}{2a} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\tau \qquad (6.5.6)$$

3)一维有界空间有源波动问题的格林函数定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 G}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \delta(x-\xi)\delta(t-\tau) \\ G|_{x=0} = 0 \quad G|_{x=l} = 0 \\ G|_{t=0} = 0 \quad \left.\dfrac{\partial G}{\partial t}\right|_{t=0} = 0\end{cases}$$

的解

$$G(x,t;\xi,\tau) = \frac{2}{\pi a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi}{l} \xi \sin \frac{k\pi a(t-\tau)}{l} \sin \frac{k\pi}{l} x$$

(6.5.7)

4)定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) & 0 < x < l, \quad t > 0 \\ u|_{x=0} = 0 \quad u|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = 0 \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0\end{cases}$$

的解,可用格林函数表为

$$u(x,t)=\int_0^t\int_0^l f(\xi,\tau)G(x,t;\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau \tag{6.5.8}$$

例2 用格林函数法求定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=x, & 0<x<l \quad t>0\\ u|_{t=0}=0 \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0\\ u|_{x=0}=0, u|_{x=l}=0\end{cases}$$

的解。

解：定解的格林函数是

$$G(x,t;\xi,\tau)=\frac{2}{\pi a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi\xi}{l}\sin\frac{k\pi a(t-\tau)}{l}\sin\frac{k\pi}{l}x$$

将它和 $f(\xi,\tau)$ 代入式(6.5.8)得

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\int_0^t\int_0^l\xi\left[\frac{2}{\pi a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi\xi}{l}\sin\frac{k\pi a(t-\tau)}{l}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\right]\sin\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\\&=\frac{2}{\pi a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left[\int_0^l\xi\sin\frac{k\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi\right]\left[\int_0^t\xi\sin\frac{k\pi a(t-\tau)}{l}\mathrm{d}\tau\right]\sin\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}\tau\\&=\frac{2}{\pi a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left[\frac{l^2}{k\pi}(-1)^{k+1}\right]\left[\frac{l}{k\pi a}(1-\cos\frac{k\pi at}{l})\right]\sin\frac{k\pi}{l}x\\&=\frac{2l^3}{\pi^3a^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^3}\left(1-\cos\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi}{l}x\end{aligned}$$

例3 用格林函数法求解定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=A\cos\dfrac{\pi}{l}x\sin\omega t & 0<x<D \quad t>0\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{x=0}=0 \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}=0\\ u|_{t=0}=0 \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0\end{cases}$$

解：由附录Ⅳ查得这个定解问题的格林函数

$G(x,t;\xi,\tau)$

$$= \frac{1}{l}(t-\tau) + \frac{2}{\pi a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi a(t-\tau)}{l}\cos\frac{k\pi\xi}{l}\cos\frac{k\pi x}{l}$$

将 $f(\xi,\tau) = A\cos\frac{\pi\xi}{l}\sin\omega\tau$ 及 $G(x,l;\xi,\tau)$ 代入式(6.5.8)得

$$u(x,t) = \frac{A}{l}\int_0^t\int_0^l (t-\tau)A\cos\frac{\pi\xi}{l}\sin\omega\tau\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau$$

$$+ \frac{2A}{\pi a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cos\frac{k\pi\xi}{l}\int_0^t\int_0^l\cos\frac{\pi\xi}{l}\sin\omega\tau\sin\frac{k\pi a(t-\tau)}{l}\cos\frac{k\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{2A}{\pi a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cos\frac{k\pi\xi}{l}\left[\int_0^l\cos\frac{\pi\xi}{l}\cos\frac{k\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi\right]$$

$$\left[\int_0^t\sin\omega t\sin\frac{k\pi a(t-\tau)}{l}\mathrm{d}\tau\right]$$

对 ξ 的积分，当 $k\neq 1$ 时等于零；对 $k=1$，这个积等于 $\frac{l}{2}$. 于是

$$u(x,t) = \frac{Al}{\pi a}\cos\frac{\pi x}{l}\int_0^t\sin\omega\tau\sin\frac{\pi a(t-\tau)}{l}\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{Al}{\pi a}\cdot\frac{1}{\omega^2 - \frac{\pi^2 a^2}{l^2}}\left(\omega\sin\frac{\pi at}{l} - \frac{\pi a}{l}\sin\omega t\right)\cos\frac{\pi x}{l}$$

习 题 六

1. 证明平面上的格林公式

$$\iint_D (v\Delta u - u\Delta v)\mathrm{d}\sigma = \int_C\left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}S$$

2. 证明二维的调和函数的基本积分公式是

$$u(M_0) = -\frac{1}{2\pi}\int_C\left[u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r_{MM_0}}\right) - \ln\frac{1}{r_{MM_0}}\cdot\frac{\partial u(M)}{\partial n}\right]\mathrm{d}S$$

3. 验证 $u = \ln\frac{1}{r}$ 在 $x\neq x_0, y\neq y_0$ 时是二维拉普拉斯方程的解。

4. 证明下列函数都是调和函数

(1) $ax+by+c$ (a,b,c 为常数)

(2) x^2-y^2 和 $2xy$ (3) x^3-3xy^2 和 $3x^2y-y^3$

(4) $\mathrm{Sh}ky\sin kx$, $\mathrm{Sh}ky\cos kx$ $\mathrm{ch}ky\sin kx$ 和 $\mathrm{ch}ky\cos kx$,(k 为常数)

5. 证明下列函数都满足调和方程

(1) $\ln r$ 和 θ

(2) $r^k\cos k\theta$ 和 $r^k\sin k\theta$ （k 为常数）

(3) $r\ln r\cos\theta-r\theta\sin\theta$ 和 $r\ln r\sin\theta+r\theta\cos\theta$

6. 利用泊松公式求解

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 & x^2+y^2+z^2<1\\ u|_{\rho=1}=2\cos 2\theta+1 & (\rho,\theta,\varphi\text{为球坐标})\end{cases}$$

7. 试求一函数 u，在半径为 a 的圆内部是调和的，在圆周 C 上取下列值

(1) $u|_C=A\cos\varphi$

(2) $u|_C=A+B\sin\varphi$

其中 A、B 都是常数。

8. 在上半平面 $y>0$ 内求解拉普拉斯方程的定解问题

$$\begin{cases}\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\\ u|_{y=0}=\begin{cases}0 & x<0\\ u_0 & x\geqslant 0\end{cases}\end{cases}$$

9. 求区域：$0\leqslant x<+\infty, 0\leqslant y<+\infty$ 的格林函数，并由此求解下列狄利克莱问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 & (0\leqslant x,y<+\infty)\\ u|_{x=0}=0 & 0\leqslant y\\ u|_{y=0}=f(x) & 0\leqslant x<+\infty\end{cases}$$

其中 $f(x)$ 为已知连续函数，且 $f(0)=0$。

10. 写出球的外部区域的格林函数，并由此导出对调和方程求解球的狄利克莱外问题的泊松公式。

第七章　积分变换法

积分变换，通常又称运算微积。是一种应用日益广泛的算法工具，是解偏微分方程常用的一种方法，通过变换，能够把一个偏微分方程问题转化为常微分方程问题，使计算大为简化。因此，它是工程技术人员最常用的一种简捷有效的方法。

本章主要介绍富里埃变换及拉普拉斯变换的一些基本性质，以及它们在解常微分方程和偏微分方程中的应用。

§7.1　富里埃积分和富里埃变换

1. 富里埃积分

熟知，一个以 $2l$ 为周期的函数 $f(x)$，如果它满足狄利克莱(Dirichlet)条件，则在区间 $[-l,l]$ 上的连续点处，$f(x)$ 的富里埃级数是

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi}{l}x+b_k\sin\frac{k\pi}{l}x\right) \qquad (7.1.1)$$

其中

$$a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{k\pi t}{l}\mathrm{d}t \quad (k=0,1,2,\cdots) \qquad (7.1.2)$$

$$b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{k\pi t}{l}\mathrm{d}t \quad (k=1,2,3,\cdots) \qquad (7.1.3)$$

将式(7.1.2)和式(7.1.3)代入式(7.1.1)得

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{k\pi(t-x)}{l}\mathrm{d}t \qquad (7.1.4)$$

若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内绝对可积，即积分 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，则当 $l\to\infty$ 时

$$\left|\frac{a_0}{2}\right| = \frac{1}{2l}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{2l}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t\right| \to 0$$

于是，在 x 保持固定下，式(7.1.4)变为

$$f(x) = \lim_{l\to\infty}\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{k\pi}{l}(t-x)\mathrm{d}t$$

如果记 $\lambda_1=\frac{\pi}{l}, \lambda_2=\frac{2\pi}{l}, \cdots, \lambda_k=\frac{k\pi}{l}, \Delta\lambda_k=\lambda_{k+1}-\lambda_k=\frac{\pi}{l}$。此时，上述积分的极限可写成

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\Delta\lambda_k\int_{-l}^{l}f(t)\cos\lambda_k(t-x)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{7.1.5}$$

由于 $\cos\lambda(t-x)$ 是关于 λ 的偶函数，因此，式(7.1.5)可变形为

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)\mathrm{d}t \tag{7.1.6}$$

我们称式(7.1.5)和式(7.1.6)为关于函数 $f(x)$ 的**富里埃积分公式**。富里埃积分还可以表示成 如下的复数形式

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{i\lambda t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{i\lambda x}\mathrm{d}\lambda$$

事实上，因为 $\sin\lambda(t-x)$ 是 λ 的奇函数，所以关于 λ 在对称区间上的积分为零，即

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\lambda(t-x)\mathrm{d}t \tag{7.1.7}$$

由式(7.1.6)减去式(7.1.7)乘以 i 得

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)[\cos\lambda(t-x) - i\sin(t-x)]\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-i\lambda t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{i\lambda x}\mathrm{d}\lambda \end{aligned}$$

对于富里埃积分公式，有下面的积分定理

富理埃(Fourier)积分定理 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义，且满足

1) 在任一有限区间都满足狄利克莱条件；

2) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内绝对可积，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \mathrm{d}x < \infty$$

则 $f(x)$ 在其连续点处富里埃积分公式成立

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-i\lambda t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{i\lambda x}\mathrm{d}\lambda \qquad (7.1.8)$$

成立。在 $f(x)$ 的第一类间断点 x_0 处，右边的积分等于

$$\frac{1}{2}[f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)]$$

2. 富里埃变换及其逆变换

在富里埃积分公式(7.1.8)中，令

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-i\lambda x}\mathrm{d}x \qquad (7.1.9)$$

则

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)\mathrm{e}^{i\lambda x}\mathrm{d}\lambda \qquad (7.1.10)$$

我们称式(7.1.9)为函数 $f(x)$ 的**富里埃变换**(Fourier transform)。记作

$$F(\lambda) = \mathscr{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-i\lambda x}\mathrm{d}x \qquad (7.1.11)$$

$F(\lambda)$ 叫做 $f(x)$ 的**像函数**。称式(7.1.10)为函数 $F(\lambda)$ 的**富里埃逆变换**(inverse Fourier fransform)。记作

$$f(x) = \mathscr{F}^{-1}[F(\lambda)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)\mathrm{e}^{i\lambda x}\mathrm{d}\lambda \qquad (7.1.12)$$

$f(x)$ 称为 $F(\lambda)$ 的**像原函数**或**逆像函数**。由此，富里埃积分公式又可表示为

$$f(x) = \mathscr{F}^{-1}\{\mathscr{F}[f(x)]\} \qquad (7.1.13)$$

上式是富里埃变换和富里埃逆变换之间的一个最重要的关系式。

实际上，求一个函数的富里埃变换(或富里埃逆变换)，就是求一个含参数的广义积分，虽然计算含参数的广义积分较为困难，但对某些函数亦易算出，对于一些常见的函数，其富里埃变换已列成表格备查(见附录Ⅰ)

与富里埃正弦级数和富里埃余弦级数类似，对奇函数和偶函数，也分别有富里埃正弦变换和富里埃余弦变换。

命题1 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty]$ 上有定义，将它延拓为 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数，并满足条件：1)在每个有限区间上分段光滑；2)在 $(-\infty,+\infty)$ 内绝对可积。若在连续点处有

$$\mathscr{F}_s[f(x)] = F_s(\lambda) = \int_0^{+\infty} f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x \qquad (7.1.14)$$

则

$$\mathscr{F}_s^{-1}[F_s(\lambda)] = f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} F_s(\lambda)\sin\lambda x\mathrm{d}\lambda \qquad (7.1.15)$$

证： 由式(7.1.5)有

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos\lambda t\cos\lambda x + \sin\lambda t\sin\lambda x)\mathrm{d}t$$

因为对任意的实数 t，有 $f(-t)=-f(t)$。故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\mathrm{d}t = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\mathrm{d}t.$$

所以

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\mathrm{d}t\right]\sin\lambda x\mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\mathrm{d}t\right]\sin\lambda x\mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} F_s(\lambda)\sin\lambda x\mathrm{d}\lambda \end{aligned}$$

命题证毕。

命题 2 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty]$ 上有定义，将它正拓成 $(-\infty,+\infty)$ 内的偶函数，且满足条件：1) 在每个有限区间上分段光滑；2) 在 $(-\infty,+\infty)$ 内绝对可积，若在连续点有

$$\mathscr{F}_c[f(x)] = F_c(\lambda) = \int_0^{+\infty} f(x)\cos\lambda x \mathrm{d}x \quad (7.1.16)$$

则

$$\mathscr{F}_c^{-1}[F_c(\lambda)] = f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} F_c(\lambda)\cos\lambda x \mathrm{d}\lambda \quad (7.1.17)$$

证： 由式(7.1.5)有

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos\lambda t\cos\lambda x + \sin\lambda t\sin\lambda x)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\lambda$$

因为对于所有的实数 t，有 $f(-t)=f(t)$，故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t \mathrm{d}t = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t \mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} f(t)\cos\lambda t \mathrm{d}t$$

所以

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty} f(t)\cos\lambda t \mathrm{d}t\right]\cos\lambda x \mathrm{d}\lambda$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} F_c(\lambda)\cos\lambda x \mathrm{d}\lambda$$

这就是所要证明的结果。

例 1 求函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-|x|}$ 的富里埃变换

解： 由式(7.1.11)有

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-i\lambda x}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{e}^{-i\lambda x}\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{(1-i\lambda)x}\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(1+i\lambda)x}\mathrm{d}x = \frac{2}{1+\lambda^2}$$

例 2 求函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-ax}(a>0)$ 的富里埃正弦变换和富里埃余弦变换。

解： 因为

$$F^{s}(\lambda)=\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin\lambda x\mathrm{d}x$$

$$=\left[-e^{-ax}\frac{\cos\lambda x}{\lambda}\right]_0^{+\infty}-\frac{a}{\lambda}\int_0^{+\infty}e^{-ax}\cos\lambda x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\lambda}-\frac{a}{\lambda}\left[e^{-ax}\frac{\sin\lambda x}{\lambda}\right]_0^{+\infty}-\frac{a^2}{\lambda^2}\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin\lambda x\mathrm{d}x$$

移项得 $\left(1+\dfrac{a^2}{\lambda^2}\right)F_s(\lambda)=\dfrac{1}{\lambda}$ 由此得

$$F_s(\lambda)=\frac{\lambda^2}{\lambda^2+a^2}\cdot\frac{1}{\lambda}=\frac{\lambda}{\lambda^2+a^2}$$

类似地可求得 $F_c(\lambda)=\dfrac{a}{\lambda^2+a^2}$

现在我们来确定在数学物理方程中经常出现的几个函数的富里埃变换。

1) δ 函数[又称狄拉克(Dirac)函数]

在自然和工程技术中，除了连续分布的量外，还常用到"集中力"和"脉冲"等离散的量，从物理上来看，它们之间并没有绝对的不同，但在数学表示的形式上，它们却有很大的区别，为了能够像处理连续分布的量那样处理离散分布的量，以统一的方式加以解决，就要引进所谓"δ 函数"这一概念。

所谓"集中力"，从物理或力学的观点看，实际上是在某点附近的小范围内有一个力密度作用所产生的总效应。在这个小范围之外，力密度为零。为方便起见，设这个总效应在数值上等于 1，将某点取作坐标原点，用 $\delta_\varepsilon(x)$表示力密度，则有

(1) 在$[-\varepsilon,\varepsilon]$上，$\delta_\varepsilon(x)\geqslant 0$；在其它地方 $\delta_\varepsilon(x)=0$ (7.1.18)

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-\infty}\delta_\varepsilon(x)\mathrm{d}x=\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta_\varepsilon(x)\mathrm{d}x=1$ (7.1.19)

十分自然地，在数学表示形式上我们将把 $\varepsilon\to 0$ 时 $\delta_\varepsilon(x)$的极限定义为"集中力"的密度，可是，在 $\varepsilon\to 0$ 时，显然有 $\delta_\varepsilon(0)\to+\infty$，而在其它处 $\delta_\varepsilon(x)\to 0$，故在通常意义下的函数类中，没有这种函数。因此，不可能用通常的求极限的方法来获得描述这些物理现象的"密度函数"。

为了描述这种现象，需要引进一些新的概念。

首先介绍弱收敛概念。

若对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在一个正整数 N，使得对于在 $[a,b]$ 上有定义的任一连续函数 $f(x)$，只要 $n\geqslant N$ 时，都有

$$\left|\int_a^b u_n(x)f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b u(x)f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon \qquad (7.1.20)$$

成立，则称函数序列 $\{u_n(x)\}$ 在区间 $[a,b]$ 上弱收敛到函数 $u(x)$，记作

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b u_n(x)f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b u(x)f(x)\mathrm{d}x \qquad (7.1.21)$$

或记作

$$\lim_{n\to\infty}u_n(x)\xlongequal{(弱)}u(x) \qquad (7.1.22)$$

并且说由序列 $\{u_n(x)\}$ 确定了一个极限元素。这个极限元素被叫做**广义函数**。仍形式地记作 $u(x)$。或形式地记作

$$\int_a^b u(x)f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b u_n(x)f(x)\mathrm{d}x \qquad (7.1.23)$$

必须指出的是，广义函数 $u(x)$ 不是普通的函数；式(7.1.23)中的积分符号也不表示普通的定积分运算。

现在回到“集中力”问题上来，我们就可以将满足式(7.1.18)和式(7.1.19)的可积函数序列 $\{\delta_\varepsilon(x)\}$，$\left(\varepsilon=\dfrac{1}{n}\right)$ 的弱收敛极限元素定义为“集中力”的密度，这个极限元素称为**狄拉克函数**，记作 $\delta(x)$。因此，$\delta(x)$ 函数是一个广义函数。

一般地，$\delta(x)$ 函数定义为

若 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_\varepsilon(x)f(x)\mathrm{d}x$$

其中 $\delta_\varepsilon(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\varepsilon} & |x|\leqslant\varepsilon\\ 0 & |x|>\varepsilon\end{cases}$ 如图 7-1 所示。

由上述 $\delta(x)$ 的定义有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_{\varepsilon}(x)\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\frac{1}{2\varepsilon}\mathrm{d}x = 1 \quad (7.1.24)$$

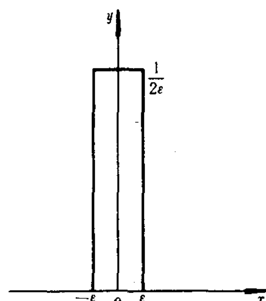


图 7-1

由定义及图 7-1 立即可以看出，$\delta(x)$ 是偶函数，即 $\delta(-x)=\delta(x)$.

$\delta(x)$ 函数的另一个最基本的性质是

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)f(x)\mathrm{d}x = f(0) \quad (7.1.25)$$

证： 按定义有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_{\varepsilon}(x)f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta_{\varepsilon}(x)f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{1}{2\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x$$

由于 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是连续函数，利用积分中值定理有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}f(\theta,2\varepsilon) = f(0) \quad (0<\theta<1)$$

利用(7.1.25)式，即可求得 $\delta(x)$ 的富里埃变换

$$\mathscr{F}[\delta(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\mathrm{e}^{-i\lambda x}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-i\lambda x}|_{x=0} = 1$$

从而有

$$\mathscr{F}^{-1}[1] = \delta(x)$$

由于 $\delta(x)$ 函数可以从原点移到数轴上的任何一点 x_0，这时式(7.1.25)变成

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_0)f(x)\mathrm{d}x = f(x_0)$$

所以

$$\mathscr{F}[\delta(x-x_0)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_0)\mathrm{e}^{-i\lambda x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-i\lambda x_0}$$

$$\mathscr{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-i\lambda x_0}]=\delta(x-x_0)$$

（2） 单位阶梯函数[又称亥维赛德(Heaviside)阶梯函数]的定义是

$$u(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x\geqslant 0\end{cases}$$

由于积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}u(x)\mathrm{e}^{-i\lambda x}\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-i\lambda x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{0}^{+\infty}\cos\lambda x\mathrm{d}x-i\int_{0}^{+\infty}\sin\lambda x\mathrm{d}x$$

是不收敛的，为确定其富里埃变换，可以把单位阶梯函数看成一个广义函数，即看成函数序列 $\{u(x)\mathrm{e}^{-\beta x}\}$ 的弱极限元素

$$u(x)\overset{(\text{弱})}{=\!=}\lim_{\beta\to 0}u(x)\mathrm{e}^{-\beta x}\quad(\beta>0)$$

则

$$\mathscr{F}[u(x)]=\lim_{\beta\to 0}\mathscr{F}[u(x)\mathrm{e}^{-\beta x}]$$

$$=\lim_{\beta\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}u(x)\mathrm{e}^{-\beta x}\mathrm{e}^{-i\lambda x}\mathrm{d}x=\lim_{\beta\to 0}\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(\beta+i\lambda)x}\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{\beta\to 0}\left[-\frac{1}{\beta+i\lambda}\mathrm{e}^{-(\beta+i\lambda)x}\right]\Bigg|_{0}^{+\infty}=\frac{1}{i\lambda}$$

同理可得

$$\mathscr{F}[u(x-a)]=\frac{1}{i\lambda}\mathrm{e}^{-i\lambda a}\qquad(7.1.26)$$

（3） 矩形脉冲函数（滤波函数，闸门函数）的定义是

$$h_{ab}(x)=\begin{cases}1 & a\leqslant x\leqslant b\\ 0 & x<a\quad x>b\end{cases}$$

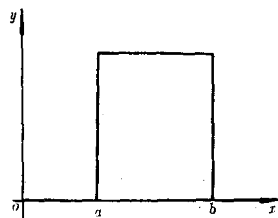


图 7-2

如图 7-2。

因为

$$h_{ab}(x) = u(x-a) - u(x-b)$$

由式(7.1.26)得

$$\begin{aligned}
&\mathscr{F}[h_{ab}(x)] \\
&= \mathscr{F}[u(x-a) - u(x-b)] \\
&= \frac{1}{i\lambda}[e^{-i\lambda a} - e^{-i\lambda b}]
\end{aligned}$$

§7.2 富里埃变换的基本性质

1. 富里埃变换的运算性质

1) 线性性质　设 a、b 为任意两个常数，则对函数 $f(x)$、$g(x)$ 有

$$\begin{aligned}
&\mathscr{F}[af(x) + bg(x)] \\
&\quad = a\mathscr{F}[f(x)] + b\mathscr{F}[g(x)] = aF(\lambda) + bG(\lambda) \quad (7.2.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}^{-1}[aF(\lambda) + bG(\lambda)] &= a\mathscr{F}^{-1}[F(\lambda)] + b\mathscr{F}^{-1}[G(\lambda)] \\
&= af(x) + bg(x) \qquad (7.2.2)
\end{aligned}$$

证　由定义(5.1.11)有

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}[af(x) + bg(x)] &= \int_{-\infty}^{+\infty}[af(x) + bg(x)]e^{-i\lambda x}dx \\
&= a\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\lambda x}dx + b\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)e^{-i\lambda x}dx \\
&= a\mathscr{F}[f(x)] + b\mathscr{F}[g(x)]
\end{aligned}$$

同理可证式(7.2.2)。

2)　位移性质　设 $F(\lambda)=\mathscr{F}[f(x)]$。则

$$\mathscr{F}[f(x \pm x_0)] = e^{\pm i\lambda x_0}\mathscr{F}[f(x)] \qquad (7.2.3)$$

$$\mathscr{F}^{-1}[F(\lambda \mp \lambda_0)] = e^{\pm i\lambda_0 x}\mathscr{F}^{-1}[F(\lambda)] \qquad (7.2.4)$$

证：由定义有

$$\mathscr{F}[f(x \pm x_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x \pm x_0) e^{-i\lambda x} dx$$

令 $x' = x + x_0$，或 $(x - x_0)$ 则得

$$\mathscr{F}[f(x \pm x_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') e^{-i\lambda(x' \mp x_0)} dx'$$

$$= e^{\pm i\lambda x_0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') e^{-i\lambda x'} dx'$$

将 x' 记作 x，故有

$$\mathscr{F}[f(x \pm x_0)] = e^{\pm i\lambda x_0} \mathscr{F}[f(x)]$$

同理可证式(7.2.4)。

3) 相似性质　如果 $\mathscr{F}[f(x)] = F(\lambda)$，则

$$\mathscr{F}[f(cx)] = \frac{1}{|c|} F\left(\frac{\lambda}{c}\right) \tag{7.2.5}$$

证：对 $c \neq 0$，由定义有

$$\mathscr{F}[f(cx)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(cx) e^{-i\lambda x} dx$$

令 $\xi = cx$，则

$$\mathscr{F}[f(cx)] = \frac{1}{|c|} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\frac{\lambda}{c}\xi} d\xi = \frac{1}{|c|} F\left(\frac{\lambda}{c}\right)$$

4) 微分性质，若 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，分段光滑，且当 $|x| \to \infty$ 时，$f(x) \to 0$，又 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 都绝对可积，则

$$\mathscr{F}[f'(x)] = i\lambda \mathscr{F}[t(x)] \tag{7.2.6}$$

证：$\mathscr{F}[f'(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-i\lambda x} dx$

$$= f(x) e^{-i\lambda x} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(-i\lambda) e^{-i\lambda x} dx$$

由于 $|x| \to \infty$ 时有 $f(x) \to 0$，故

$$\mathscr{F}[f'(x)] = i\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx = i\lambda \mathscr{F}[f(x)]$$

如果当 $|x| \to \infty$ 时有 $f(x) \to 0$，$f'(x) \to 0$。则有

$$\mathscr{F}[f''(x)] = (i\lambda)^2 \mathscr{F}[f(x)]$$

一般地，若$|x|\to\infty$时有$f(x)\to 0, f^{(k)}(x)\to 0$，($k=1,2,\cdots,(n-1)$)。则有

$$\mathscr{F}[f^{(k)}(x)] = i\lambda\mathscr{F}[f^{(k-1)}(x)] = \cdots = (i\lambda)^k\mathscr{F}[f(x)]$$

对于象函数，我们同样可得到其求导公式，设$\mathscr{F}[t(x)]=F(\lambda)$，则

$$\frac{\mathrm{d}F(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = \mathscr{F}[-ixf(x)]$$

一般地有

$$\frac{\mathrm{d}^k F(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda^k} = (-i)^k\mathscr{F}[x^k f(x)] \tag{7.2.7}$$

2. 卷积和它的性质

1） 卷积的定义　设$f_1(x)$，$f_2(x)$满足富里埃变换的条件，则积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi)f_2(x-\xi)\mathrm{d}\xi$$

称为函数$f_1(x)$和$f_2(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$内的**卷积**(Convolution)，记作$f_1(x)*f_2(x)$。即

$$f_1(x)*f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi)f_2(x-\xi)\mathrm{d}\xi \tag{7.2.8}$$

符号“$*$”是一种函数间的运算，它与乘法相似，具有以下的性质：

$$f_1(x)*f_2(x) = f_2(x)*f_1(x) \qquad \text{交换律}$$

$$[f_1(x)*f_2(x)]*f_3(x) = f_1(x)*[f_2(x)*f_3(x)] \qquad \text{结合律}$$

$$f_1(x)*[f_2(x)+f_3(x)] = f_1(x)*f_2(x)+f_1(x)*f_3(x) \qquad \text{分配律}$$

由定义立即可证明这些性质，例如，证明交换律。

$$f_1(x)*f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi)f_2(x-\xi)\mathrm{d}\xi$$

令$x-\xi=\xi'$，则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi) \mathrm{d}\xi = \int_{+\infty}^{-\infty} f_1(x-\xi') f_2(\xi')(-\mathrm{d}\xi')$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\xi') f_1(x-\xi') \mathrm{d}\xi'$$

将积分变量仍记作 ξ，有

$$f_1(x) * f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\xi) f_1(x-\xi) \mathrm{d}\xi = f_2(x) * f_1(x)$$

例 3 设

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geqslant 0 \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \mathrm{e}^{-x} & x \geqslant 0 \end{cases}$$

求 $f_1(x) * f_2(x)$。

解: 由卷积定义有

$$f_1(x) * f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi) \mathrm{d}\xi$$

因为 $\xi<0$ 时，$f_1(\xi)=0$；$x-\xi<0$，即 $\xi>x$ 时，$f_2(x-\xi)=0$，故

$$f_1(x) * f_2(x) = \int_0^x 1 \cdot \mathrm{e}^{-(x-\xi)} \mathrm{d}\xi = \mathrm{e}^{-x} \int_0^x \mathrm{e}^{\xi} \mathrm{d}\xi = 1 - \mathrm{e}^{-x}$$

2) 卷积定理 设 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 都满足富里埃积分的条件，且 $f_1(x) * f_2(x)$ 也满足富里埃积分条件，则

(1) $$\mathscr{F}[f_1(x) * f_2(x)] = \mathscr{F}[f_1(x)] \cdot \mathscr{F}[f_2(x)] \tag{7.2.9}$$

或 $$\mathscr{F}^{-1}\{\mathscr{F}[f_1(x)] \cdot \mathscr{F}[f_2(x)]\} = f_1(x) * f_2(x) \tag{7.2.10}$$

(2) $$\mathscr{F}[f_1(x) * f_2(x)] = \frac{1}{2\pi} \mathscr{F}[f_1(x)] * \mathscr{F}[f_2(x)] \tag{7.2.11}$$

或 $$\mathscr{F}^{-1}\{\mathscr{F}[f_1(x)] * \mathscr{F}[f_2(x)]\} = 2\pi f_1(x) \cdot f_2(x) \tag{7.2.12}$$

证 式(7.2.9)，由定义

$$\mathscr{F}[f_1(x) * f_2(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi) \mathrm{d}\xi \right] \mathrm{e}^{-i\lambda x} \mathrm{d}x$$

因为 $f_1(x)$，$f_2(x)$在$(-\infty,+\infty)$上绝对可积，可以证明能交换积分次序，于是有

$$\mathscr{F}[f_1(x)*f_2(x)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\xi)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(x-\xi)e^{i\lambda x}dx\right]d\xi$$

令 $\eta=x-\xi$，有

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f_1(x)*f_2(x)]&=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\xi)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(\eta)e^{-i\lambda(\eta+\xi)}d\eta\right]d\xi\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(\eta)e^{-i\lambda\eta}d\eta\\&=\mathscr{F}[f_1(x)]\cdot\mathscr{F}[f_2(x)]\end{aligned}$$

同理可证式(7.2.11)

卷积定理提供了卷积计算的简便方法：化卷积计算为乘积运算。

由于富里埃正弦变换和余弦变换对求解半无限区域的边值问题特别适合。所以，我们先介绍关于它们的微分法定理。

定理 1 若 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 及其一阶导数都趋于零，$\mathscr{F}_c[f(x)]=F_c(\lambda)$ 是 $f(x)$ 的富里埃余弦变换，则

$$\mathscr{F}_c[f'(x)]=\int_0^{+\infty}f'(x)\cos\lambda x dx=\lambda F_s(\lambda)-f(0) \tag{7.2.13}$$

$$\mathscr{F}_c[f''(x)]=-\lambda^2F_c(\lambda)-f'(0) \tag{7.2.14}$$

证：

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_c[f'(x)]&=[f(x)\cos\lambda x]\Big|_0^{+\infty}+\lambda\int_0^{+\infty}f(x)\sin\lambda x dx\\&=-f(0)+\lambda F_s(\lambda)=\lambda F_s(\lambda)-f(0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_c[f''(x)]&=\int_0^{+\infty}f''(x)\cos\lambda x dx\\&=[f'(x)\cos\lambda x]\Big|_0^{+\infty}+\lambda\int_0^{+\infty}f'(x)\sin\lambda x dx\\&=-f'(0)+[\lambda f(x)\sin\lambda x]\Big|_0^{+\infty}-\lambda^2\int_0^{+\infty}f(x)\cos\lambda x dx\\&=-f'(0)-\lambda^2F_c(\lambda)\end{aligned}$$

定理 2 若 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 和它的一阶导数都趋于零，如果

$F_s(\lambda)$是 $f(x)$的富里埃正弦变换，则

$$\mathscr{F}_s[f'(x)] = \int_0^{+\infty} f'(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x = -\lambda F_c(\lambda) \quad (7.2.15)$$

$$\mathscr{F}_s[f''(x)] = \lambda f(0) - \lambda^2 F_s(\lambda) \quad (7.2.16)$$

证明与定理1同，这里从略。

同理可得高阶导数的变换结果。

例4 一根半无限长的杆，初始温度分布等于零。在端点 $x=0$ 处以 $g(t)$为速率输入热量，求杆的温度分布，这时定解问题可归结为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad x > 0 \quad t > 0 \\ u\big|_{t=0} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = g(t) \end{cases}$$

这里假设当 $x\to\infty$时，$u(x,t)$和$\dfrac{\partial u}{\partial x}$都趋于零。

解： 令 $U(\lambda,t)$是 $u(x,t)$的富里埃余弦变换，即

$$U(\lambda,t) = \int_0^{+\infty} u(x,t)\cos\lambda x\mathrm{d}x = \mathscr{F}_c[u(x,t)]$$

由微分性式(7.2.14)得

$$\mathscr{F}_c\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = \int_0^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t}\cos\lambda x\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathscr{F}_c\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos\lambda x\mathrm{d}x = -\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} - \lambda^2 U(\lambda,t)$$

于是，热传导方程变为常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + \lambda^2 U = -g(t)$$

这个常微分方程的解是

$$U(\lambda,t) = \mathrm{e}^{-\lambda^2 t}\left[-\int_0^t g(\tau)\mathrm{e}^{\lambda^2\tau}\mathrm{d}\tau + C\right]$$

由初始条件有 $U(\lambda,0)=0=C$， 所以

$$U(\lambda,t) = -\int_0^t g(\tau)e^{-\lambda^2(t-\tau)}d\tau$$

由式(7.1.17)，$U(\lambda,t)$的逆变换是

$$\mathscr{F}^{-1}[U(\lambda,t)] = u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} F_c(\lambda)\cos\lambda x d\lambda$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[-\int_0^t g(\tau)e^{-\lambda^2(t-\tau)}d\tau\right]\cos\lambda x d\lambda$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int_0^t g(\tau)d\tau\int_0^{+\infty} e^{-\lambda^2(t-\tau)}\cos\lambda x d\lambda$$

由积分表可查得

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda^2(t-\tau)}\cos\lambda x d\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t-\tau}}e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}}$$

于是所求定解问题的解是

$$u(x,t) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{g(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}}d\tau$$

因为 k 维富里埃变换在解高维波动方程或热传导方程的定解问题时很有用处，现将其简介如下。

k 维富里埃变换的定义

$$\mathscr{F}[f(x_1,x_2,\cdots,x_k)] = F(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2,\cdots,x_k)e^{-i(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_kx_k)}d\lambda_1\cdots d\lambda_k$$

其逆变换为

$$\mathscr{F}^{-1}[F(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k)] = f(x_1,x_2,\cdots,x_k)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^k}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k)e^{i(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_kx_k)}d\lambda_1\cdots d\lambda_k$$

k 维富里埃变换具有与一维富里埃变换一样的一些性质。例如

$$\mathscr{F}[af_1 + bf_2] = a\mathscr{F}[f_1] + b\mathscr{F}[f_2]$$

$$\mathscr{F}[f_1 * f_2] = \mathscr{F}[f_1]\cdot\mathscr{F}[f_2]$$

其中 $f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_1-\xi_1,x_2-\xi_2,\cdots,x_k-\xi_k)f_2(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k)d\xi_1d\xi_2\cdots d\xi_k$

$$\mathscr{F}[f_1 \cdot f_2] = \frac{1}{(2\pi)^k}\mathscr{F}[f_1] * \mathscr{F}[f_2]$$

$$\mathscr{F}\left[\frac{\partial}{\partial x_k}f\right] = i\lambda_k\mathscr{F}[f_1] \qquad k = 1,2,3,\cdots,n$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_k}\{\mathscr{F}[f]\} = \mathscr{F}[-ix_kf] \qquad k = 1,2,3,\cdots,n$$

§7.3 用富里埃变换法解微分方程

1. 用富里埃变换法解常微分方程

利用富里埃变换，可将线性常系数微分方程转化成代数方程，求得代数方程的解之后，再求富里埃逆变换，即得微分方程的解，例如，设有常微分方程

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = \mathrm{d}(x) \qquad (7.3.1)$$

其中 a,b,c 为常数，$\mathrm{d}(x)$为已知函数，x 在$(-\infty,+\infty)$中变化，令

$$Y(\lambda) = \mathscr{F}[y(x)], \quad D(\lambda) = \mathscr{F}[\mathrm{d}(x)]$$

在方程(7.3.1)两边取富里埃变换，由富里埃变换的运算性质可得

$$a(i\lambda)^2Y(\lambda) + b(i\lambda)Y(\lambda) + cY(\lambda) = D(\lambda)$$

即

$$Y(\lambda) = \frac{D(\lambda)}{-a\lambda^2 + c + ib\lambda} \qquad (7.3.2)$$

对式 (7.3.2)取富里埃逆变换，得微分方程的解

$$y(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}Y(\lambda)\mathrm{e}^{i\lambda x}\mathrm{d}\lambda \qquad (7.3.3)$$

2. 解偏微分方程

例 5 求解非齐次弦振动方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \quad -\infty < x < +\infty \quad t > 0 \\ u|_{t=0} = \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \quad -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

解： 第一步，以 t 为参变量，对 x 取富里埃变换。令

$$\mathscr{F}[u(x,t)] = U(\lambda,t), \mathscr{F}[f(x,t)] = G(\lambda,t)$$

得关于 t 的常微分方程初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{d^2U(\lambda,t)}{dt^2} + a^2\lambda^2 U(\lambda,t) = G(\lambda,t) & (7.3.4) \\ U|_{t=0} = 0 \quad \dfrac{dU}{dt}\Big|_{t=0} = 0 & (7.3.5) \end{cases}$$

第二步，以 λ 为参数，对 t 解常微分方程的初值问题，用常数变异法求非齐次方程的特解，对应的齐次方程的两个线性无关的特解是

$$U_1(\lambda,t) = \cos\lambda at \quad U_2(\lambda,t) = \sin\lambda at$$

由常数变法，可设非齐次常微分方程的特解为

$$U^* = v_1\cos\lambda at + v_2\sin\lambda at \tag{7.3.6}$$

将它代入方程式(7.3.4)得到 v_1, v_2 必须满足的一个方程。但待定函数有两个，即 v_1, v_2 为确定它们，必须再找出一个限制条件。从理论上讲，另一个条件可以任意给出，自然，应以运算简便为宜，为此，我们将按下面的方法给出另一个条件。

对 t 微分式(7.3.6)得

$$U^{*\prime} = -v_1\lambda a\sin\lambda at + v_2\lambda a\cos\lambda at + v'_1\cos\lambda at + v'_2\sin\lambda at$$

为使 $U^{*\prime\prime}$ 的表达式中不含 v''_1, v''_2 可设

$$v'_1\cos\lambda at + v'_2\sin\lambda at = 0 \tag{7.3.7}$$

从而

$$U^{*\prime} = -v_1\lambda a\sin\lambda at + v_2\lambda a\cos\lambda at$$

对 $U^{*\prime}$ 再微分得

$$U^{*\prime\prime} = -v_1(\lambda a)^2\cos\lambda at - v_2(\lambda a)^2\sin\lambda at - v'_1\lambda a\sin\lambda at + v'_2\lambda a\cos\lambda at$$

将U^*,$U^{*\prime}$,$U^{*\prime\prime}$代入方程式(7.3.4),并注意到$\cos\lambda at$,$\sin\lambda at$是对应的齐次线性方程的两个线性无关特解,化简后得

$$-v'_1\lambda a\sin\lambda at + v'_2\lambda a\cos\lambda at = G(\lambda,t) \qquad (7.3.8)$$

由式(7.3.7)和式(7.3.8)解得

$$v'_1 = -\frac{1}{\lambda a}G(\lambda,t)\sin\lambda at,\ v'_2 = \frac{1}{\lambda a}G(\lambda,t)\cos\lambda at$$

取

$$v_1 = -\frac{1}{\lambda a}\int_0^t G(\lambda,\tau)\sin\lambda a\tau\mathrm{d}\tau, v_2 = \frac{1}{\lambda a}\int_0^t G(\lambda,\tau)\cos\lambda a\tau\mathrm{d}\tau$$

得方程的特解

$$\begin{aligned}U^* &= \frac{1}{\lambda a}\int_0^t G(\lambda,\tau)[\sin\lambda a\tau\cos\lambda at + \cos\lambda a\tau\sin\lambda at]\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{\lambda a}\int_0^t G(\lambda,\tau)\sin\lambda a(t-\tau)\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

从而方程的通解为

$$U(\lambda,t) = C_1\cos\lambda at + C_2\sin\lambda at + \frac{1}{\lambda a}\int_0^t G(\lambda,\tau)\sin\lambda a(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

由初始条件(7.3.5)确定$C_1=C_2=0$,因此求得满足初始条件的解是

$$U(\lambda,t) = \int_0^t G(\lambda,\xi)\,\frac{\sin\lambda a(t-\tau)}{\lambda a}\mathrm{d}\tau$$

第三步以t为参数,对λ作富里埃逆变换

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_0^t G(\lambda,\tau)\,\frac{\sin\lambda a(t-\tau)}{\lambda a}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{i\lambda x}\mathrm{d}\lambda$$

由于

$$\frac{\sin\lambda a(t-\tau)}{\lambda a} = \frac{1}{2a}\int_{-a(t-\tau)}^{a(t-\tau)}\mathrm{e}^{-i\lambda\xi}\mathrm{d}\xi$$

所以定解问题的解为

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \frac{1}{2a}\int_0^t\left\{\int_{-a(t-\tau)}^{a(t-\tau)}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G(\lambda,\tau)\mathrm{e}^{i\lambda(x-\xi)}\mathrm{d}\lambda\right]\mathrm{d}\xi\right\}\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{2a}\int_0^t\int_{-a(t-\tau)}^{a(t-\tau)}f(x-\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\eta,\tau)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\tau \quad (令\ \eta = x - \xi)$$

例 6 求解齐次热传导方程的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & -\infty < x < +\infty \quad t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) & -\infty < x < +\infty\end{cases}$$

解： 以 t 为参数，将方程及初始条件对 x 取富里埃变换，令

$$\mathscr{F}[u(x,t)] = U(\lambda,t), \quad \mathscr{F}[\varphi(x)] = \Phi(\lambda)$$

得关于 t 的常微分方程初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}U(\lambda,t)}{\mathrm{d}t} + a^2\lambda^2 U(\lambda,t) = 0 \\ U|_{t=0} = \Phi(\lambda)\end{cases}$$

方程的通解是 $U(\lambda,t) = C\mathrm{e}^{-\lambda^2a^2t}$，利用初始条件，得

$$U(\lambda,0) = \Phi(\lambda) = C$$

于是，常微分方程初值问题的解为

$$U(\lambda,t) = \Phi(\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda^2a^2t}$$

将上式对 λ 取逆富里埃变换，得

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \mathscr{F}^{-1}[U(\lambda,t)] = \mathscr{F}^{-1}[\Phi(\lambda)e^{-\lambda^2a^2t}] \\ &= \mathscr{F}^{-1}[\Phi(\lambda)] * \mathscr{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-\lambda^2a^2t}] \\ &= \varphi(x) * \mathscr{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-\lambda^2a^2t}]\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-\lambda^2a^2t}] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(\lambda^2a^2t-i\lambda x)}\mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda^2a^2t}(\cos\lambda x + i\sin\lambda x)\mathrm{d}\lambda\end{aligned}$$

由于 $\mathrm{e}^{-\lambda^2a^2t}\sin\lambda x$ 为奇函数，它的积分值为零，故

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-\lambda^2a^2t}] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda^2a^2t}\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left[-\frac{x^2}{4a^2t}\right]\end{aligned}$$

因此，

$$u(x,t)=\varphi(x)*\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left[-\frac{x^2}{4a^2t}\right]$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]\mathrm{d}\xi$$

并将

$$G(x,\xi,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]$$

称为热传导方程的初值问题的基本解。

例 7 求解非齐次热传导方程的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t) & -\infty<x<+\infty \quad t>0\\ u|_{t=0}=\varphi(x) & -\infty<x<+\infty\end{cases}$$

解： 以 t 为参数，将方程及初始条件对 x 取富里埃变换，并令

$$\mathscr{F}[u(x,t)]=U(\lambda,t),\ \mathscr{F}[\varphi(x)]=\Phi(\lambda)$$

$$\mathscr{F}[f(x,t)]=G(\lambda,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,t)\mathrm{e}^{-i\lambda x}\mathrm{d}x$$

得关于 t 的常微分方程初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}U(\lambda,t)}{\mathrm{d}t}+a^2\lambda^2U(\lambda,t)=G(\lambda,t)\\ U|_{t=0}=\Phi(\lambda)\end{cases}$$

以 λ 为参数，上述常微分方程的解是

$$U(\lambda,t)=\Phi(\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda^2a^2t}+\int_0^t G(\lambda,\tau)\mathrm{e}^{-\lambda^2a^2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau$$

再以 t 为数，将 $U(\lambda,t)$ 对 λ 取富里埃逆变换得

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}U(\lambda,t)\mathrm{e}^{i\lambda x}\mathrm{d}\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\lambda)\mathrm{e}^{-(\lambda^2a^2t-i\lambda x)}\mathrm{d}\lambda$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_0^t G(\lambda\cdot\tau)\mathrm{e}^{\lambda^2a^2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\right\}e^{i\lambda x}\mathrm{d}\lambda$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi$$

$$+\int_0^t\left[f(x,\tau) * \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\tau$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi$$

$$+\int_0^t\left\{\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\xi,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi\right\}d\tau$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\xi,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi d\tau$$

例 8 求下列半平面 $y>0$ 内的狄利克莱问题的解。

$$\begin{cases}\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 & -\infty<x<+\infty \quad y>0\\ u|_{t=0}=f(x) & -\infty<x<+\infty\\ \lim\limits_{|x|\to\infty}u(x,y)=0, & \lim\limits_{|x|\to\infty}\dfrac{\partial u}{\partial x}=0\\ \text{当 } y\to\infty \text{ 时}, u(x,y) \text{ 有界}\end{cases}$$

解： 因为 $-\infty<x<+\infty$，故可对变量 x 取富里埃变换，并令

$$\mathscr{F}[u(x,t)]=U(\lambda,y),\mathscr{F}[f(x)]=\Phi(\lambda)$$

由富里埃变换的运算性质有

$$\mathscr{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=-\lambda^2U(\lambda,y)$$

而

$$\mathscr{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]=-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}e^{-i\lambda x}dx$$

$$=\frac{d^2}{dy^2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,y)e^{-i\lambda x}dx\right]=\frac{d^2U}{dy^2}$$

$$\mathscr{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]=\mathscr{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]+\mathscr{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]$$

于是，拉普拉斯方程变成常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2U(\lambda,y)}{\mathrm{d}y^2}-\lambda^2U(\lambda,y)=0$$

其通解是

$$U(\lambda,y)=A(\lambda)\mathrm{e}^{\lambda y}+B(\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda y}$$

因为当 $y\to\infty$ 时，u 是有界的，所以当 $y\to\infty$ 时，$U(\lambda,y)$ 也必须有界。故当 $\lambda>0$ 时，$A(\lambda)=0$，且 $y=0$ 时有

$$U(\lambda,0)=B(\lambda)$$

当 $\lambda<0$ 时，必有 $B(\lambda)=0$，且当 $y=0$ 时有 $U(\lambda,0)=A(\lambda)$，因此，对于任何 $\lambda\neq0$ 都有

$$U(\lambda,y)=U(\lambda,0)\mathrm{e}^{-|\lambda|y}$$

又因为 $U(\lambda,0)=\mathscr{F}[u(x,0)]=\mathscr{F}[f(x)]=\Phi(\lambda)$，故有

$$U(\lambda,y)=\Phi(\lambda)\mathrm{e}^{-|\lambda|y}$$

从而 $U(\lambda,y)$ 的逆富里埃变换为

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\mathscr{F}^{-1}[\Phi(\lambda)\mathrm{e}^{-|\lambda|y}]=\mathscr{F}^{-1}[\Phi(\lambda)]*\mathscr{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-|\lambda|y}]\\&=f(x)*\frac{y}{\pi}\frac{1}{x^2+y^2}=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\xi)}{(\xi-x)^2+y^2}\mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

这里我们利用了

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-|\lambda|y}]&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-|\lambda|y}\mathrm{e}^{i\lambda x}\mathrm{d}\lambda\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda y}\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda=\frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2}\end{aligned}$$

因此，在上半平面 $y>0$ 上的狄利克莱问题的解是

$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\xi)}{(\xi-x)^2+y^2}\mathrm{d}\xi$$

例 9 求半平面 $y>0$ 上的牛曼问题的解

$$
\begin{cases}
\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & -\infty < x < +\infty \quad y > 0 \\
\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = g(x) & -\infty < x < +\infty \\
\lim\limits_{|x|\to\infty} u(x,y) = 0 \quad \lim\limits_{|x|\to\infty} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\
\text{当 } y \to \infty \text{ 时}, u \text{ 有界}
\end{cases}
$$

解： 通过函数代换，将牛曼问题转化为例 8 的狄利克莱问题。最后求得牛曼问题的解。

$$
\text{令} \quad v(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} u(x,y), \quad \text{则}
$$

$$
u(x,y) = \int_a^y v(x,\eta)\mathrm{d}\eta
$$

其中 a 是任意常数。由此得

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] = 0 \\
v|_{y=0} = \dfrac{\partial}{\partial y} u(x,y)|_{y=0} = g(x)
\end{cases}
$$

由例 8 知，它的解是

$$
v(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\xi)\mathrm{d}\xi}{(\xi - x)^2 + y^2}
$$

从而得牛曼问题的解

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= \frac{1}{\pi}\int_a^y \mathrm{d}\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\xi)\mathrm{d}\xi}{(\xi - x)^2 + \eta^2}\mathrm{d}\eta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) \ln \frac{(\xi - x)^2 + y^2}{(\xi - x)^2 + a^2}\mathrm{d}\xi
\end{aligned}
$$

例 10 求二维热传导方程的初值问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0 & -\infty < x,y < +\infty \quad t > 0 \\
u(x,y,t)|_{t=0} = \varphi(x,y) & -\infty < x,y < +\infty
\end{cases}
$$

解： 因为 $-\infty < x,y < +\infty$，故对 $u(x,y,t)$，$\varphi(x,y)$ 关于 x，

y 作富里埃变换。并令

$$\mathscr{F}[u(x,y,t)] = U(\lambda_1,\lambda_2,t)$$

$$\mathscr{F}[\varphi(x,y)] = \Phi(\lambda_1,\lambda_2)$$

得关于 t 的一阶常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}U(\lambda_1,\lambda_2,t)}{\mathrm{d}t} + a^2(\lambda_1^2+\lambda_2^2)U(\lambda_1,\lambda_2,t) = 0 \\ U(\lambda_1,\lambda_2,t)|_{t=0} = \Phi(\lambda_1,\lambda_2) \end{cases}$$

它的解是

$$U(\lambda_1,\lambda_2,t) = \Phi(\lambda_1,\lambda_2)\mathrm{e}^{-a^2(\lambda_1^2+\lambda_2^2)t}$$

将上式对 λ_1,λ_2 取富里埃逆变换得

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= \mathscr{F}^{-1}[\Phi(\lambda_1,\lambda_2)\mathrm{e}^{-a^2(\lambda_1^2+\lambda_2^2)t}] \\ &= \mathscr{F}^{-1}[\Phi(\lambda_1,\lambda_2)] * \mathscr{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-a^2(\lambda_1^2+\lambda_2^2)t}] \end{aligned}$$

因为

$$\mathscr{F}^{-1}[\Phi(\lambda_1,\lambda_2)] = \varphi(x,y)$$

$$\begin{aligned} \mathscr{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-a^2(\lambda_1^2+\lambda_2^2)t}] &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a^2(\lambda_1^2+\lambda_2^2)t}\mathrm{e}^{i(\lambda_1x+\lambda_2y)}\mathrm{d}\lambda_1\mathrm{d}\lambda_2 \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a^2\lambda_1^2t}\mathrm{e}^{i\lambda_1x}\mathrm{d}\lambda_1\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a^2\lambda_2^2t}\cdot\mathrm{e}^{i\lambda_2y}\mathrm{d}\lambda_2 \\ &= \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a^2\lambda_1^2t}\cos\lambda_1x\mathrm{d}\lambda_1\right]\cdot\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a^2\lambda_2^2t}\cos\lambda_2y\mathrm{d}\lambda_2\right] \\ &= \frac{1}{4\pi a^2t}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{4a^2t}} \end{aligned}$$

由此得原初值问题的解为

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= \varphi(x,y) * \frac{1}{4\pi a^2t}\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{4at}\right] \\ &= \frac{1}{4\pi a^2t}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi,\eta)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \end{aligned}$$

§7.4 拉普拉斯变换

应用富里埃变换解微分方程，要求函数必须在$(-\infty,+\infty)$内

绝对可积。这一条件，大大限制了其应用范围。因为一些最常用的函数，如常值函数、多项式函数之类都不能进行富里埃变换，为了克服这些缺点，现在我们引进另一种积分变换，称为**拉普拉斯变换**。

由于用拉普拉斯变换解偏微分方程的步骤比较简单，所以，拉普拉斯变换经常用来求解相当广泛的一类偏微分方程。像其它积分变换一样，拉普拉斯变换是用来求特解的。

1. 拉普拉斯变换的概念

定义 设函数 $f(t)$ 当 $t\geqslant 0$ 时有定义，且积分

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \quad (s\text{ 是复参量})$$

在 s 的某一区域内收敛，则由此积分所确定的(复变)函数

$$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \tag{7.4.1}$$

称为函数 $f(t)$ 的**拉普拉斯变换式**(简称拉氏变换式)。记为

$$\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$$

$F(s)$ 称为 $f(t)$ 的拉普拉斯变换式或称为**像函数**。

若 $F(s)$ 是 $f(t)$ 的拉普拉斯像函数，则称 $f(t)$ 为 $F(s)$ 的**拉普拉斯逆变换**，或称为**像原函数**，或称**逆像**。记作

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)] \tag{7.4.2}$$

显然有关系式

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{\mathscr{L}[f(t)]\}$$

2. 拉普拉斯变换的存在定理

若 $f(t)$ 满足条件

1) 对于任意的 $T\geqslant 0$，在区间 $[0,T]$ 上分段连续；

2) 当 t 充分大后，$|f(t)|\leqslant Me^{Ct}$，其中 $M>0, C\geqslant 0$ 为常数，则有

1） $f(t)$的拉普拉斯变换在半平面 $\mathrm{Re}(s)>C$ 上存在；

2） 在这半平面内，积分 $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$ 绝对收敛且一致收敛；

3） 在这半平面内，像函数 $F(s)$是解析函数。

证： 对于任何 t 值$(0\leqslant t<+\infty)$，由条件 2)知

$$|f(t)\mathrm{e}^{-st}| = |f(t)|\mathrm{e}^{-\beta t} \leqslant M\mathrm{e}^{-(\beta-C)t} \quad \mathrm{Re}s = \beta$$

令 $\beta-C\geqslant\varepsilon>0$（即 $\beta\geqslant C+\varepsilon=C_1>C$），则$|f(t)\mathrm{e}^{-st}|\leqslant M\mathrm{e}^{-\varepsilon t}$，所以

$$\int_0^{+\infty} |f(t)||\mathrm{e}^{-st}|\mathrm{d}t \leqslant M\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\varepsilon t}\mathrm{d}t = \frac{M}{\varepsilon}$$

根据含参数的广义积分一致收敛的判别法可知，在 $\mathrm{Re}(s)\geqslant C_1>0$ 内，积分 $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$ 是绝对收敛且一致收敛的。这样，我们就证明了 $F(s)$的在性、积分 $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$ 的绝对且一致收敛性。为了证明 $F(s)$的解析性，在式(7.4.1)的积分号内对 s 求导，得

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[f(t)\mathrm{e}^{-st}]\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} -tf(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

因为 $\quad |-tf(t)\mathrm{e}^{-st}|\leqslant Mt\mathrm{e}^{-(\beta-C)t}\leqslant Mt\mathrm{e}^{-\varepsilon t}$

所以

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[f(t)\mathrm{e}^{-st}]\right|\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{M} Mt\mathrm{e}^{-\varepsilon t}\mathrm{d}t = \frac{M}{\varepsilon^2}$$

从而 $\quad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[f(t)\mathrm{e}^{-st}]\mathrm{d}t$ 在半平面 $\mathrm{Re}s\geqslant C_1>0$ 内也是绝对收敛且一致收敛的。故可交换微分和积分的次序。

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F(s) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[f(t)\mathrm{e}^{-st}]\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} -tf(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \mathscr{L}[-tf(t)]\end{aligned}$$

由复变函数的解析函数理论知，$F(s)$在 $\mathrm{Re}(s)>C$ 内是解析的。

3. 拉普拉斯变换计算举例

1） 设 C 为常数，则

$$\mathscr{L}[C]=\int_0^{+\infty} Ce^{-st}\mathrm{d}t=-\frac{C}{s}e^{-st}\Big|_0^{+\infty}=\frac{C}{s}\quad(\mathrm{Re}s>0)$$

2） 设 a 为实数，则

$$\mathscr{L}[e^{at}]=\int_0^{+\infty}e^{at}\cdot e^{-st}\mathrm{d}t=-\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{s-a}\quad(s>a)$$

3） 求正弦函数 $f(t)=\sin kt$（k 为实数）的拉普拉斯变换

$$\mathscr{L}[\sin kt]=\int_0^{+\infty}\sin kte^{-st}\mathrm{d}t=\frac{k}{s^2+k^2}$$

$$=\frac{e^{st}}{s^2+k^2}(-s\sin kt-k\cos kt)\big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{k}{s^2+k^2}\quad(\mathrm{Re}s>0)$$

4） 求幂函数 $f(t)=t^m$（常数 $m>-1$）的拉普拉斯变换

$$\mathscr{L}[t^m]=\int_0^{+\infty}t^me^{-st}\mathrm{d}t$$

令 $st=z$，则得

$$\mathscr{L}[t^m]=\int_0^{+\infty}\frac{z^m}{s^m}e^{-z}\frac{\mathrm{d}z}{s}$$

$$=\frac{1}{s^{m+1}}\int_0^{+\infty}z^me^{-z}\mathrm{d}z$$

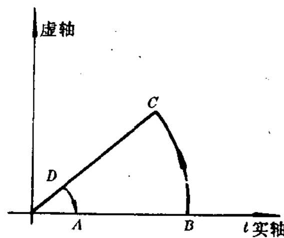


图 7-3

取围道如图 7-3 所示，$\overline{AB}$和$\overline{CD}$都是直线，$\widehat{BC}$和$\widehat{DA}$是以 0 为中心，以 R 和 r 为半径的两段圆弧。由于被积函数 z^me^{-z}在所围的区域内是解析的，由柯西（Couchy）积分定理有

$$\int_{ABCDA}z^me^{-z}\mathrm{d}z=0$$

即

$$\int_{\overline{AB}}x^me^{-x}\mathrm{d}x+\int_{\widehat{BC}}z^me^{-z}\mathrm{d}z+\int_{\overline{CD}}z^me^{-z}\mathrm{d}z+\int_{\widehat{DA}}z^me^{-z}\mathrm{d}z=0$$

若令 $R\to+\infty, r\to0^+$，则

$$\int_{\overline{AB}} x^m e^{-x} dx \to \int_0^{+\infty} x^m e^{-x} dx$$

$$\int_{\overline{CD}} z^m e^{-z} dz \to \int_{+\infty}^{0} z^m e^{-z} dz = -\int_0^{+\infty} z^m e^{-z} dz$$

对复变函数积分进行估值，可以证明

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\widehat{BC}} z^m e^{-z} dz = 0, \lim_{r\to0^+}\int_{\widehat{DA}} z^m e^{-z} dz = 0$$

从而得

$$\int_0^{+\infty} z^m e^{-z} dz = \int_0^{+\infty} x^m e^{-x} dx$$

由 Γ 函数的定义有

$$\mathscr{L}[t^m] = \frac{1}{s^{m+1}}\Gamma(m+1) \quad (\mathrm{Re}s > 0)$$

当 m 为非负整数时，有

$$\mathscr{L}[t^m] = \frac{m!}{s^{m+1}} \quad \mathrm{Re}s > 0$$

在 $m=0$ 时有

$$\mathscr{L}[1] = \frac{1}{s} \quad \mathrm{Re}s > 0$$

§7.5　拉普拉斯变换的性质及反演积分

为叙述方便，假定凡是要求拉普拉斯变换的函数，都满足拉普拉斯变换存在定理的条件，且有相同的增长指数 C。

1. 拉普拉斯变换的性质

性质 1（线性性质）　设 a,b 为常数，则

$$\mathscr{L}[af+bg] = a\mathscr{L}[f] + b\mathscr{L}[g] \qquad (7.5.1)$$

此性质由定义即可证明。

性质 2(位移性质)　设 $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$,则

$$\mathscr{L}[e^{s_0 t}f(t)] = F(s - s_0) \quad \mathrm{Re}(s - s_0) > 0 \qquad (7.5.2)$$

证：

$$\mathscr{L}[e^{s_0 t}f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{s_0 t} f(t) e^{-st} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(s-s_0)t} dt = F(s - s_0)$$

例 11　因为 $\mathscr{L}[t^2]=\dfrac{2}{s^3}$,故　$\mathscr{L}[t^2 e^{-t}]=\dfrac{2}{(s+1)^3}$

因为　$\mathscr{L}[\sin kt]=\dfrac{k}{s^2+k^2}$,故 $\mathscr{L}[e^{-t}\sin kt]=\dfrac{k}{(s+1)^2+k^2}$

性质 3(相似性质)　$a>0$ 为常数,则

$$\mathscr{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \qquad (7.5.3)$$

由定义即可证明。

例 12　由 $\mathscr{L}[\cos t]=\dfrac{s}{s^2+1}$可得

$$\mathscr{L}[\cos kt] = \frac{1}{k} \cdot \frac{\frac{s}{k}}{\left(\frac{s}{k}\right)^2 + 1} = \frac{s}{s^2 + k^2}$$

由 $\mathscr{L}[e^t]=\dfrac{1}{s-1}$可得 $\mathscr{L}[e^{at}]=\dfrac{1}{a}\dfrac{1}{\frac{s}{a}-1}=\dfrac{1}{s-a}$

性质 4(微分性质)

$$\mathscr{L}[f'(t)] = s\mathscr{L}[f(t)] - f(0)$$

一般地有

$$\mathscr{L}[f^{(k)}(t)] = s^k\mathscr{L}[f(t)] - s^{k-1}f(0) - s^{k-2}f'(0) - \cdots - f^{(k-1)}(0) \qquad (7.5.4)$$

其中 $f^{(k)}(0)$理解为右极限值$\lim\limits_{t\to 0^+} f^{(k)}(t)$。

证：

$$\mathscr{L}[f'(t)] = \int_0^{+\infty} f'(t) e^{-st} dt$$

$$= [f(t)e^{-st}]_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$= -f(0) + s\mathscr{L}[f(t)]$$

而

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}[f^{(k)}(t)] \\
&= s\mathscr{L}[f^{(k-1)}(t)] - f^{(k-1)}(0) \\
&= s^2\mathscr{L}[f^{(k-2)}(t)] - sf^{(k-2)}(0) - f^{(k-1)}(0) = \cdots \\
&= s^k\mathscr{L}[f(t)] - s^{(k-1)}f(0) - s^{(k-2)}f'(0) \\
&\quad - \cdots - f^{(k-1)}f(0)
\end{aligned}$$

这个性质使我们有可能将关于 $f(t)$ 的常微分方程转化为 $F(s)$ 的代数方程。

性质 5(积分性质)

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right] = \frac{F(s)}{s} \qquad (7.5.5)$$

证： 设 $h(t) = \int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$ 则有 $h'(t) = f(t)$ 且 $h(0) = 0$

由微分性质有

$$\mathscr{L}[h'(t)] = s\mathscr{L}[h(t)] - h(0) = s\mathscr{L}[h(t)]$$

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right] = \frac{1}{s}F(s)$$

性质 6(延迟性质) 设 $t<0$ 时 $f(t)=0$，则对任一非负实数 τ 有

$$\mathscr{L}[f(t-\tau)] = \mathrm{e}^{-s\tau}\mathscr{L}[f(t)] \qquad (7.5.6)$$

或

$$\mathscr{L}^{-1}\{\mathrm{e}^{-s\tau}\mathscr{L}[f(t)]\} = f(t-\tau)$$

证： 因为 $\mathscr{L}[f(t-\tau)] = \int_0^{+\infty} f(t-\tau)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$

$$= \int_0^{\tau} f(t-\tau)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t + \int_{\tau}^{+\infty} f(t-\tau)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

由于 $t-\tau<0$，即 $t<\tau$ 时 $f(t-\tau)=0$，故第一个积分等于零，对于第二个积分，令 $t-\tau=u$，则有

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[f(t-\tau)] &= \int_{\tau}^{+\infty} f(t-\tau)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} f(u)\mathrm{e}^{-s(u+\tau)}\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-s\tau}\int_0^{+\infty} f(u)\mathrm{e}^{-su}\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

$$= e^{-s\tau}\mathscr{L}[f(t)] \quad \mathrm{Re}s > C$$

例 13 求函数 $u(t-\tau)=\begin{cases}0 & t<\tau\\ 1 & t>\tau\end{cases}$ 的拉普拉斯变换。

解： 因为 $\mathscr{L}[u(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{s}$

由延迟性质有

$$\mathscr{L}[u(t-\tau)] = e^{-s\tau}\mathscr{L}[u(t)] = \frac{1}{s}e^{-s\tau}$$

性质 7(微分反演性质) 若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，则

$$F^{(k)}(s) = \mathscr{L}[(-t)^k f(t)] \quad \mathrm{Re}s > C \qquad (7.5.7)$$

特别地 $\quad F'(s)=\mathscr{L}[-tf(t)] \quad \mathrm{Re}s>C$

或 $\quad f(t)=-\frac{1}{t}\mathscr{L}^{-1}[F'(s)]$

证： 由拉普拉斯变换存在定理知 $F(s)$ 是解析的，故

$$\frac{dF(s)}{ds} = \frac{d}{ds}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_0^{+\infty}\frac{d}{ds}[f(t)e^{-st}]dt$$

$$= \int_0^{+\infty} -tf(t)e^{-st}dt = \mathscr{L}[-tf(t)] \quad \mathrm{Re}s > C$$

由归纳法，不难证明

$$F^{(k)}(s) = \mathscr{L}[(-t)^k f(t)] \quad \mathrm{Re}s > C$$

例 14 求函数 $f(t)=t\sin kt$ 的拉普拉斯变换

解： 因为 $\mathscr{L}[\sin kt]=\frac{k}{s^2+k^2}$，由微分反演性质得

$$\mathscr{L}[t\sin kt] = -\frac{d}{ds}\left[\frac{k}{s^2+k^2}\right] = \frac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$$

同理可得

$$\mathscr{L}[f\cos kt] = \frac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$$

微分反演性质指出，如果已知 $f(t)$ 的像函数，那么，$tf(t)$ 的像函数就可由求导数而得。

卷积 函数

$$f(t)*g(t) = \int_0^t f(t-\xi)g(\xi)d\xi \qquad (7.5.8)$$

称为函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的**卷积**。由定义可知，卷积运算“$*$”具有与乘法一样的性质。即

1）交换律：$f(t)*g(t)=g(t)*f(t)$

2）结合律：$[f(t)*h(t)]*g(t)=f(t)*[h(t)*g(t)]$

3）分配律：$[f(t)+h(t)]*g(t)=f(t)*g(t)+h(t)*g(t)$

卷积定理 设 $f(t)$ 和 $g(t)$ 满足拉普拉斯变换存在定理的条件，则

$$\mathscr{L}[f(t)*g(t)]=\mathscr{L}[f(t)]\cdot\mathscr{L}[g(t)] \qquad (7.5.9)$$

或

$$\mathscr{L}^{-1}\{\mathscr{L}[f(t)]\cdot\mathscr{L}[g(t)]\}=f(t)*g(t) \qquad (7.5.10)$$

证：因为 $f(t)*g(t)=\int_0^t f(t-\xi)g(\xi)\mathrm{d}\xi$，且 $f(t)$、$g(t)$ 都满足拉普拉斯变换存在定理的条件，故 $f(t)*g(t)$ 也满足上述条件，所以 $\mathscr{L}[f(t)*g(t)]$ 存在

$$\mathscr{L}[f(t)*g(t)]=\int_0^{+\infty}[f(t)*g(t)]\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{+\infty}\left[\int_0^t f(t-\xi)g(\xi)\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

这个积分的积分区域如图 7-4，可以证明，累次积分是绝对收敛的，因此可以交换积分次序，得

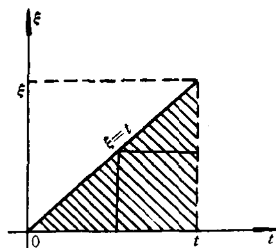


图 7-4

$$\mathscr{L}[f(t)*g(t)]$$

$$=\int_0^{+\infty}\int_\xi^{+\infty}\mathrm{e}^{-st}f(t-\xi)g(\xi)\mathrm{d}t\mathrm{d}\xi$$

$$=\int_0^{+\infty}g(\xi)\left[\int_\xi^{+\infty}\mathrm{e}^{-st}f(t-\xi)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\xi$$

对内层积分令 $\eta=t-\xi$，则

$$\mathscr{L}[f(t)*g(t)]$$

$$=\int_0^{+\infty}g(\xi)\left[\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(\xi+\eta)s}f(\eta)\mathrm{d}\eta\right]\mathrm{d}\xi$$

$$=\int_0^{+\infty}g(\xi)\mathrm{e}^{-s\xi}\mathrm{d}\xi\int_0^{+\infty}f(\eta)\mathrm{e}^{-\eta s}\mathrm{d}\eta$$

$$=\mathscr{L}[g(\xi)]\cdot\mathscr{L}[f(\eta)]$$

$= \mathscr{L}[f(t)] \cdot \mathscr{L}[g(t)]$

为使用方便，常将卷积定理写成如下形式

$$\mathscr{L}^{-1}\{\mathscr{L}[f(t)] \cdot \mathscr{L}[g(t)]\} = f(t) * g(t)$$

$$= \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) \mathrm{d}\tau$$

该定理在求拉普拉斯逆变换时很有用处。

例 15 已知 $F(s)=\frac{s^2}{(s^2+1)^2}$，求 $f(t)$

解： 因为 $F(s)=\frac{s}{s^2+1} \cdot \frac{s}{s^2+1}$，故

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1} \cdot \frac{s}{s^2+1}\right]$$

$$=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] * \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]$$

已知(或由查表)得

$$\mathscr{L}[\cos t] = \frac{s}{s^2+1}，故\ \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] = \cos t$$

于是

$$f(t) = \cos t * \cos t = \int_0^t \cos\xi \cos(t-\xi) \mathrm{d}\xi$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t [\cos t + \cos(2\xi - t)] \mathrm{d}\xi$$

$$= \frac{1}{2}\left[\xi \cos t + \frac{1}{2}\sin(2\xi - t)\right]\Big|_0^t$$

$$= \frac{1}{2}(t\cos t + \sin t)$$

2. 常用函数的拉普拉斯变换

1) $\delta(t)$函数的拉普拉斯变换式

$$\mathscr{L}[\delta(t)] = \int_0^{+\infty} \delta(t) \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t = 1$$

同理有

$$\mathscr{L}[\delta(t-t_0)]=\int_0^{+\infty}\delta(t-t_0)e^{-st}dt=e^{-st_0}$$

反之，

$$\mathscr{L}^{-1}[1]=\delta(t),\quad \mathscr{L}^{-1}[e^{-st}]=\delta(t-t_0)$$

2） 单位阶跃函数的拉普拉斯变换式

$$\mathscr{L}[u(t)]=\int_0^{+\infty}u(t)e^{-st}dt=\int_0^{+\infty}e^{-st}dt=\frac{1}{s}\quad \mathrm{Re}s>0$$

同理可得

$$\mathscr{L}[u(t-a)]=\int_0^{+\infty}e^{-st}u(t-a)dt$$

$$=\int_a^{+\infty}e^{-st}dt=\frac{e^{-as}}{s}\quad \mathrm{Re}s>0$$

3） 滤波函数 $h_{ab}(t)$的拉普拉斯变换式

$$\mathscr{L}[h_{ab}(t)]=\mathscr{L}[u(t-a)-u(t-b)]$$

$$=\frac{1}{s}(e^{-as}-e^{-bs})$$

例 16 求 $f(t)=\begin{cases}\sin t & 0\leqslant t\leqslant\pi\\ 0 & t<0\quad t>\pi\end{cases}$的拉普拉斯变换

解： $\mathscr{L}[f(t)]=\mathscr{L}[h_{0\pi}\sin t]=\mathscr{L}\{[u(t)-u(t-\pi)]\sin t\}$

$$=\mathscr{L}[u(t)\sin t+u(t-\pi)\sin(t-\pi)]$$

$$=\frac{1}{s^2+1}(1+e^{-\pi s})$$

例 17 若 $\mathscr{L}[f(t)]$存在，则 $f(t)*\delta(t)=f(t)$

证： 因为 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，$\mathscr{L}[\delta(t)]=1$。由卷积定理有

$$f(t)*\delta(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)\cdot 1]=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=f(t)$$

因此，$\delta(t)$在卷积中相当于单位元素。

4） 周期函数的拉普拉斯变换式

设 $f(t)$是以 T 为周期的周期函数，在$[0,T]$上分段连续，则 $f(t)$的拉普拉斯变换为

$$\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{kT}^{(k+1)T}f(t)e^{-st}dt$$

令 $\xi=t-kT$，则

$$\mathscr{L}[f(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-kTs} \int_0^T \mathrm{e}^{-s\xi} f(\xi)\mathrm{d}\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-kTs} F_1(s)$$

这里 $F_1(s) = \int_0^T \mathrm{e}^{-s\xi} f(\xi)\mathrm{d}\xi$ 是函数 $f(t)$在第一个周期上的拉普拉斯变换，由此可得

$$\mathscr{L}[f(t)] = \frac{F_1(s)}{1-\mathrm{e}^{Ts}} \tag{7.5.11}$$

例 18 求函数

$$f(t) = \begin{cases} h, & 0 < t < c \\ -h, & c < t < 2c \end{cases} \quad 且\ f(t+2c) = f(t)$$

的拉普拉斯变换式。

解： 如图 7-5 所示我们有

$$\begin{aligned} F_1(s) &= \int_0^{2c} \mathrm{e}^{-s\xi} f(\xi)\mathrm{d}\xi \\ &= \int_0^{c} \mathrm{e}^{-s\xi} h\mathrm{d}\xi \\ &\quad + \int_c^{2c} \mathrm{e}^{-s\xi}(-h)\mathrm{d}\xi - h \\ &= \frac{h}{s}(1-\mathrm{e}^{cs})^2 \end{aligned}$$

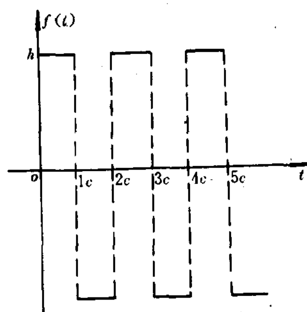


图 7-5

于是 $f(t)$的拉普拉斯变换式是

$$\begin{aligned} &\mathscr{L}[f(t)] \\ &= \frac{F_1(s)}{1-\mathrm{e}^{-2cs}} = \frac{h(1-\mathrm{e}^{-cs})^2}{s(1-\mathrm{e}^{-2cs})} \\ &= \frac{h(1-\mathrm{e}^{-cs})}{s(1+\mathrm{e}^{-cs})} = \frac{h}{s} th \frac{cs}{2} \end{aligned}$$

3. 拉普拉斯逆变换的求法

对于 $t<0$ 时为零的函数 $f(t)$的拉普拉斯变换，就是 $f(t)\mathrm{e}^{-\beta t}$ 的富里埃变换。实践证明，在 β 取适当大时，积分

$$\mathscr{F}[f(t)e^{-\beta t}] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\beta t} \cdot e^{-i\lambda t}dt$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-(\beta+i\lambda)t}dt$$

收敛。记 $s=\beta+i\lambda$，则上述积分为

$$\mathscr{F}[f(t)e^{-\beta t}] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$
$$= \mathscr{L}[f(t)]$$

由富里埃积分公式有

$$f(t)e^{-\beta t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-(\beta+i\lambda)t}dt\right]d\lambda$$

即

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-(\beta+i\lambda)t}dt\right]e^{(\beta+i\lambda)t}d\lambda$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-(\beta+i\lambda)t}dt\right]e^{(\beta+i\lambda)t}d\lambda$$

记 $s=\beta+i\lambda$，则 $ds=id\lambda$。于是

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}\left[\int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt\right]e^{st}ds$$

由此得拉普拉斯逆变换的表达式为

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} F(s)e^{st}ds \qquad (7.5.12)$$

式(7.5.12)中右端的积分称 **拉普拉斯反演积分**。这是一个复变函数的积分，一般较难计算。当 $F(s)$ 满足一定条件时，可利用留数方法计算。

定理 设 $s_1, s_2, \cdots$ 是函数 $F(s)$ 的所有极点，分布在半平面 $\mathrm{Re}(s)\leqslant\beta_0$ 上，当 $s\to\infty$ 时，$F(s)\to 0$。并且对任一个 $\beta>\beta_0$，积分 $\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} F(s)ds$ 绝对收敛，则 $F(s)$ 的像原函数

$$f(t) = \sum_k \underset{s=s_k}{\mathrm{Res}}[F(s)e^{st}]$$

证： 考察如图 7-6 所示的闭围道 $C=L+C_R$ 上的积分

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C F(s)e^{st}ds$$

根据留数定理，它应等于闭道 C 所围区域内的所有孤立奇点上的留数之和，即

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C F(s)e^{st}ds = \sum_k \underset{s=s_k}{\mathrm{Res}}[F(s)e^{st}]$$

即

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{\beta-iR}^{\beta+iR} F(s)e^{st}ds + \int_{C_R} F(s)e^{st}ds\right] = \sum_k \underset{s=s_k}{\mathrm{Res}}[F(s)e^{st}]$$

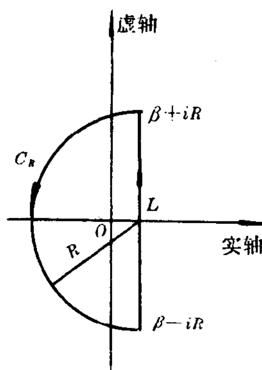


图 7-6

其中 C_R 在 $\mathrm{Re}s<\beta$ 的区域内是半径为 R 的圆弧，当 k 充分大后，可以使 $F(s)$ 的所有奇点包含在闭曲线 C 围成的区域内，在上式左方取 $R\to+\infty$ 时的极限，由约当(Jordan)引理①，当 $t>0$ 时，有

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} F(s)e^{st}ds = 0$$

所以

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} F(s)e^{st}ds = \sum_k \underset{s=s_k}{\mathrm{Res}}[F(s)e^{st}] \quad t>0 \tag{7.5.13}$$

证毕。

我们虽然得到了求拉普拉斯逆变换的一般公式，黎曼-梅梅(Riemann-Mellin)公式

---

① 这里指的是推广的约当引理：设复变函数 $F(s)$ 满足下列条件
1)它在左半平面内($\mathrm{Re}s<\beta$)除有限个奇点外是解析的。
2)对于 $\mathrm{Re}s<\beta$ 的 s，当 $|s|=R\to+\infty$ 时，$F(x)$ 一致地趋于零，则当 $t>0$ 时有

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} F(s)e^{st}ds = 0$$

其中 C_R：$|s|=R$，$\mathrm{Re}s<\beta$，它是以 $\beta+oi$ 为圆心，R 为半径的圆弧。

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi v}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} F(s)e^{st}ds = \sum_k \underset{s=s_k}{\mathrm{Res}}[F(s)e^{st}] \quad t > 0$$

由于涉及到复变函数的一些理论，实际计算中往往并不直接利用它。一般常用的有以下几种方法：

1）直接查表法：一些简单而又常用的像函数与像原函数，作为拉普拉斯变换对已列入拉氏变换表中，使用时，直接对照查表。若与位移性，相似性等结合使用，还可扩大表的使用范围。

2）部分分式法：如果像函数是一个比较复杂的关于 s 的有理真分式，可用部分分式法将它分解为若干个简单的真分式的代数和，然后分别查表取逆变换。

例 19 求 $F(s)=\frac{1}{s^2(s+1)}$ 的逆变换

解：因为 $\frac{1}{s^2(s+1)}=-\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s+1}$

由拉普拉斯变换的性质得

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(s)] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right]$$

$$= -\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]$$

查表得 $\quad \mathscr{L}[1]=\frac{1}{s} \quad \mathscr{L}[t]=\frac{1}{s^2} \quad \mathscr{L}^{-1}[e^{-t}]=\frac{1}{s+1}$

故得 $\quad \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]=1 \quad \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]=t \quad \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]=e^{-t}$

所以 $\quad f(t)=-1+t+e^{-t}$

拉普拉斯变换表，实际上已假定了函数和它的拉氏变换之间有一一对应的关系，关于这个假定有如下的定理：

勒奇(Lerch)定理 设 $f(t)$ 和 $g(t)$ 都是指数阶的分段连续函数，如果存在常数 S_0，使 $S>S_0$ 时有 $\mathscr{L}[f(t)]=\mathscr{L}[g(t)]$，则对一切 $t>0$，除了 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的间断点之外，有 $f(t)=g(t)$。

3）海维赛(Heaviside)展开式法　设函数 $F(s)$ 可表成两个整函数 $A(s)$ 和 $B(s)$ 之商，即

$$F(s)=\frac{A(s)}{B(s)}$$

海维赛第一展开定理 若$\frac{A(s)}{B(s)}$是既约的有理真分式函数，且分母$B(s)$有单零点$s_1,s_2,\cdots,s_n$，即它们都是$F(s)$的单极点，于是由留数计算

$$\operatorname*{Res}_{s=s_k}\left[\frac{A(s)}{B(s)}e^{st}\right]=\frac{A(s_k)}{B'(s_k)}e^{s_k t}$$

由式(7.5.13)即得

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{A(s_k)}{B'(s_k)}e^{s_k t}\quad t>0 \tag{7.5.14}$$

例 20 求$F(s)=\frac{s}{s^2+1}$的逆变换。

解： $B(s)=s^2+1$有两个单零点$s_1=i,s_2=-i$，由式(7.5.14)有

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]=\frac{s}{2s}e^{st}\bigg|_{s=i}+\frac{s}{2s}e^{st}\bigg|_{s=-i}$$

$$=\frac{1}{2}(e^{it}+e^{-it})=\cos t\quad t>0$$

例 21 求$F(s)=\frac{1}{(s+1)(s-2)(s+3)}$的逆变换。

解： $B(s)=(s+1)(s-2)(s+3)$有三个单零点$s_1=-1,s_2=2,s_3=-3$。$B'(s)=(s-2)(s+3)+(s+1)(s+3)+(s+1)(s-2)$
由式(7.5.14)有

$$f(t)=\frac{1}{(s-2)(s+3)+(s+1)(s+3)+(s+1)(s-2)}e^{-st}\bigg|_{s=-1}$$
$$+\frac{1}{(s-2)(s+3)+(s+1)(s+3)+(s+1)(s-2)}e^{-st}\bigg|_{s=2}$$
$$+\frac{1}{(s-2)(s+3)+(s+1)(s+3)+(s+1)(s-2)}e^{-st}\bigg|_{s=-3}$$
$$=-\frac{1}{6}e^{-t}+\frac{1}{15}e^{2t}+\frac{1}{10}e^{-3t}$$

海维赛第二展开定理 若$\frac{A(s)}{B(s)}$是既约有理真分式。设$s_1,s_2,$

$\cdots, s_k$ 分别为 $B(s)$ 的 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ 阶零点。即分别为 $\frac{A(s)}{B(s)}$ 的 $m_i(i=1,2,\cdots,k)$ 阶极点。由留数的算法有

$$\operatorname*{Res}_{s=s_k}\left[\frac{A(s)}{B(s)}e^{st}\right]=\frac{1}{(m_k-1)!}\lim_{s\to s_k}\frac{d^{m_k-1}}{ds^{m_k-1}}\left[(s-s_k)^{m_k}\frac{A(s)}{B(s)}e^{st}\right]$$

从而有

$$\begin{aligned}f(t)&=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(m_k-1)!}\lim_{s\to s_k}\frac{d^{m_k-1}}{ds^{m_k-1}}\left[(s-s_k)^{m_k}\frac{A(s)}{B(s)}e^{st}\right]\end{aligned}\tag{7.5.15}$$

例 22 求 $F(s)=\frac{s}{(s+1)^3(s-1)}$ 的逆变换。

解： $B(s)=(s+1)^3(s-1)$，$s_1=-1$ 是三阶零点，$s_2=1$ 是单零点，由式(7.5.15)和式(7.5.14)有

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{s}{2(2s-1)(s+1)^2}e^{st}\bigg|_{s=1}\\&\quad+\frac{1}{2!}\lim_{s\to-1}\frac{d^2}{ds^2}\left[(s+1)^3\frac{s}{(s+1)^3(s-1)}e^{st}\right]\\&=\frac{1}{8}e^t+\frac{1}{2!}\lim_{s\to-1}\frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{s}{s-1}e^{st}\right]\\&=\frac{1}{8}e^t+\frac{1}{2!}\lim_{s\to-1}\left\{\frac{e^{st}}{(s-1)^3}[s(s-1)^2t^2-2t(s-1)+2]\right\}\\&=\frac{1}{8}e^t-\frac{e^{-t}}{8}(1+2t-2t^2)\end{aligned}$$

4) 卷积定理法

若 $F(s)=F_1(s)\cdot F_2(s)$，而 $F_1(s)$ 与 $F_2(s)$ 的像原函数均可求出，则可利用卷积定理

$$\begin{aligned}f(t)&=\mathscr{L}^{-1}[F_1(s)\cdot F_2(s)]=f_1(t)*f_2(t)\\&=\int_0^t f_1(\xi)f_2(t-\xi)d\xi\end{aligned}\tag{7.5.16}$$

求出 $f(t)$。当 $f_1(t)$、$f_2(t)$ 中有一个未具体给出函数时，则可用积分式子表示像原函数。

例 23 已知 $F(s)=\Phi(s)\frac{1}{s^2+1}$，且 $\mathscr{L}^{-1}[\Phi(s)]=\varphi(t)$，$\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=f(t)$，求 $f(t)$.

解: 因为 $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]=\sin t$，由式(7.5.16)有

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\Phi(s)\cdot\frac{1}{s^2+1}\right]=\varphi(t)*\sin t$$

$$=\int_0^t\varphi(\xi)\sin(t-\xi)\mathrm{d}\xi$$

5) 延迟定理法

如果 $F(s)=F_1(s)\mathrm{e}^{-\tau s}$，$\tau$ 为常数，即像函数的分子式中含有指数因子 $\mathrm{e}^{-\tau s}$，且能求出 $F_1(s)$ 的逆变换，则可利用延迟定理

$$\mathscr{L}^{-1}[\mathrm{e}^{-\tau s}F_1(s)]=f_1(t-\tau)u(t-\tau)$$

求出 $F(s)$ 的逆变换。

例 24 求 $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{e}^{-bs}}{s(s+1)}\right]$

解 因为 $\frac{1}{s(s+1)}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}$，故 $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)}\right]=1-\mathrm{e}^{-t}$

由延迟定理得

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{e}^{-bs}}{s(s+1)}\right]=[1-\mathrm{e}^{-(t-b)}]u(t-b)$$

$$=\begin{cases}0 & t<b\\ 1-\mathrm{e}^{-(t-b)} & t\geqslant b\end{cases}$$

其中

$$u(t-b)=\begin{cases}0 & t<b\\ 1 & t\geqslant b\end{cases}$$

§7.6 用拉普拉斯变换法求解微分方程

1. 解线性常微分方程

用拉普拉斯变换法求解线性常微分方程，分三步完成。第一

步，通过拉普拉斯变换，把常微分方程及其定解条件化为未知函数的像函数的代数方程；第二步，求解代数方程；第三步，对代数方程的解求拉普拉斯逆变换，就得到了原微分方程定解问题的解。

我们将用例题来说明求解的具体过程。

例 25 求解初值问题

$$\begin{cases} y'' + 2y' - 3y = e^{-t} \\ y|_{t=0} = 0,\ y'|_{t=0} = 1 \end{cases}$$

解： 令 $Y(s)=\mathscr{L}[y(t)]$，对方程两边取拉普拉斯变换，则有

$$\mathscr{L}[y''] + 2\mathscr{L}[y'] - 3\mathscr{L}[y] = \mathscr{L}[e^{-t}]$$

由拉普拉斯变换的微分性质得

$$\{s^2\mathscr{L}[y] - sy(0) - y'(0)\} + 2\{s\mathscr{L}[y] - y(0)\} - 3\mathscr{L}[y] = \frac{1}{s+1}$$

利用初始条件，有

$$(s-1)(s+3)\mathscr{L}[y] - 1 = \frac{1}{s+1}$$

解得 $$Y(s)=\mathscr{L}[y]=\frac{s+2}{(s+1)(s-1)(s+3)}$$

对 $Y(s)$ 求拉氏逆变换即得

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathscr{L}^{-1}[Y(s)] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{(s+1)(s-1)(s+3)}\right] \\ &= \mathscr{L}^{-1}\left[-\frac{1}{4}\frac{1}{s+1} + \frac{3}{8}\frac{1}{s-1} + \left(-\frac{1}{8}\right)\frac{1}{s+3}\right] \\ &= -\frac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] + \frac{3}{8}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] - \frac{1}{8}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right] \\ &= \frac{1}{8}(3e^{t} - 2e^{-t} - e^{-3t}) \end{aligned}$$

例 26 $\begin{cases} y''+a^2y=b\sin at \\ y|_{t=0}=y_0 \quad y'|_{t=0}=y_0' \end{cases}$ 其中 a,b 为非零常数

解： 令 $Y(s)=\mathscr{L}[y(t)]$，对方程施行拉普拉斯变换，并注意到定解条件，化简得到

$$Y(s)=\frac{ab}{(s^2+a^2)^2}+y_0\frac{s}{s^2+a^2}+y_0'\frac{1}{s^2+a^2}$$

将上式右端第一项分解为部分分式.

$$\frac{ab}{s^2+a^2}=\frac{b}{2a}\left[\frac{1}{s^2+a^2}-\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}\right]$$

于是

$$Y(s)=\frac{b}{2a}\left[\frac{1}{s^2+a^2}-\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}\right]+y_0\frac{s}{s^2+a^2}+y_0'\frac{1}{s^2+a^2}$$

$$=\frac{b}{2a^2}\left[\frac{a}{s^2+a^2}-a\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}\right]+y_0\frac{s}{s^2+a^2}+\frac{y_0'}{a}\frac{a}{s^2+a^2}$$

对 $Y(s)$ 求拉普拉斯逆变换得

$$y(t)=\frac{b}{2a^2}(\sin at-at\cos at)+y_0\cos at+\frac{y_0'}{a}\sin at$$

$$=\frac{1}{2a^2}[(b+2ay_0')\sin at+a(2ay_0-bt)\cos at]$$

例 27 求方程 $y'''+3y''+3y'+y=1$ 的满足初始条件 $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$ 的解

解: 对方程两边施行拉普拉斯变换,利用微分性质并注意到初始条件得

$$(s^3+3s^2+3s+1)Y(s)=\frac{1}{s}$$

由此得

$$Y(s)=\frac{1}{s(s+1)^3}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}-\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{1}{(s+1)^3}$$

对 $Y(s)$ 取拉氏逆变换得

$$y(t)=1-e^{-t}-te^{-t}-\frac{1}{2}t^2e^{-t}=1-\frac{1}{2}(t^2+2t+2)e^{-t}$$

拉普拉斯变换既可用于解常系数高阶线性常微分方程,也可以用来解常系数线性常微分方程组。

例 28 试求方程组 $\begin{cases}y'=3y+5x+e^{-t},y(0)=0\\x'=-5y+3x,\ x(0)=1\end{cases}$ 的解

解: 令 $Y(s)=\mathscr{L}[y(t)],X(s)=\mathscr{L}[x(t)]$,对方程组施行拉

普拉斯变换并注意到初始条件得

$$\begin{cases} sY(s) = 3Y(s) + 5X(s) + \dfrac{1}{s+1} \\ sX(s) - 1 = -5Y(s) + 3X(s) \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} (s-3)Y(s) - 5X(s) = \dfrac{1}{s+1} \\ 5Y(s) + (s-3)X(s) = 1 \end{cases}$$

由此解得

$$Y(s) = \frac{\dfrac{s-3}{s+1} + 5}{(s-3)^2 + 5^2} = \frac{1}{41}\left[4\frac{s-3}{(s-3)^3 + 5^2} + 46\frac{5}{(s-3)^2+5^2} - 4\frac{1}{s+1}\right]$$

$$X(s) = \frac{s - 3 - \dfrac{5}{s+1}}{(s-3)^2 + 5^2} = \frac{1}{41}\left[46\frac{s-3}{(s-3)^3 + 5^2} - 4\cdot\frac{5}{(s-3)^2+5^2} - 5\frac{1}{s+1}\right]$$

对 $Y(s)$、$X(s)$取拉普拉斯逆变换得

$$y(t) = \frac{1}{41}e^{3t}(4\cos 5t + 46\sin 5t - 4e^{-4t})$$

$$x(t) = \frac{1}{41}e^{3t}(46\cos 5t - 4\sin 5t - 5e^{-4t})$$

例 29 求方程组

$$\begin{cases} y'' - x'' + x' - y = e^t - 2, & y(0) = y'(0) = 0 \\ 2y'' - x'' - 2y' + x = -t, & x(0) = x'(0) = 0 \end{cases}$$

的解。

解: 设 $X(s) = \mathscr{L}[x(t)]$, $Y(s) = \mathscr{L}[y(t)]$。对方程组两边施行拉普拉斯变换,并注意到初始条件,即得

$$\begin{cases} s^2Y(s) - s^2X(s) + sX(s) - Y(s) = \dfrac{1}{s-1} - \dfrac{2}{s} \\ 2s^2Y(s) - s^2X(s) - 2sY(s) + X(s) = -\dfrac{1}{s^2} \end{cases}$$

即
$$\begin{cases}(s+1)Y(s)-sX(s)=\dfrac{-s+2}{s(s-1)^2}\\[2ex] 2sY(s)-(s+1)X(s)=-\dfrac{1}{s^2(s-1)}\end{cases}$$

解得
$$X(s)=\frac{2s-1}{s^2(s-1)^2},Y(s)=\frac{1}{s(s-1)^2}$$

对 $X(s)$、$Y(s)$取拉普拉斯逆变换得

$$\begin{aligned}x(t)&=\mathscr{L}^{-1}[X(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2s-1}{s^2(s-1)^2}\right]\\&=\mathscr{L}^{-1}\left[-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{(s-1)^2}\right]\\&=-\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]+\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right]=-t+te^t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y(t)&=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s-1)^2}\right]\\&=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s-1}+\frac{1}{(s-1)^2}\right]\\&=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]-\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]+\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right]=1-e^t+te^t\end{aligned}$$

2. 解线性偏微分方程

用拉普拉斯变换法解偏微分方程定解问题，与用富里埃变换法求解偏微分方程定解问题类似。其过程大体亦为以下的四个步骤。

1）对方程两端施行拉普拉斯变换，把一个含两个自变量的偏微分方程化为含一参变量的常微分方程；

2）对定解条件取相应的拉普拉斯变换，导出新方程的定解条件；

3）解所得常微分方程的定解问题，求得原定解问题的变换式；

4）对所得变换式取逆变换，即得原定解问题的解。

例 30 求半无限长杆的温度分布，已知端点温度 $\varphi(t)$及初始温度为零。

解：该问题归结为求解定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 & x>0 \quad t>0\\ u|_{t=0}=0 & x>0\\ u|_{x=0}=\varphi(t) & t>0,\ \lim\limits_{x\to\infty}u(x,t)\text{ 有界}\end{cases}$$

注意到 $t>0$，且给出了初始条件，故我们可以考虑关于变量 t 的拉普拉斯变换。令

$$U(x,s)=\mathscr{L}[u(x,t)]=\int_0^{+\infty}u(x,t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$\Phi(s)=\mathscr{L}[\varphi(t)]=\int_0^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

由拉普拉斯变换的微分性质有

$$\mathscr{L}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]=s\mathscr{L}[u(x,t)]-u(x,0)=sU(x,s)$$

$$\mathscr{L}\left[a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=a^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}[\mathscr{L}(u(x,t))]=a^2\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}$$

所以，对泛定方程施行拉普拉斯变换后得常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}-\frac{s}{a^2}U=0$$

对边界条件取拉普拉斯变换有

$$U(0,s)=\mathscr{L}[u(0,t)]=\mathscr{L}[\varphi(t)]=\Phi(s)$$

这样，得到常微分方程的定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}-\dfrac{s}{a^2}U=0\\ U(0,s)=\Phi(s)\end{cases}$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x,t)$ 有界，故 $\lim\limits_{x\to+\infty}U(x,s)$ 也有界，常微分方程的通解是

$$U(x,s)=A\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{s}}{a}x}+B\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x}$$

由于 U 当 $x\to+\infty$ 时的有界性，故必须有 $A=0$，因此。

$$U(x,s)=B\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x}$$

利用边界条件得 $B=\Phi(s)$，从而得特解

$$U(x,s)=\Phi(s)\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x}$$

对 $U(x,s)$ 施行拉普拉斯逆变换，由卷积定理有

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\mathscr{L}^{-1}[U(x,s)]\\&=\mathscr{L}^{-1}\left[\Phi(s)\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x}\right]\\&=\mathscr{L}^{-1}[\Phi(s)]*\mathscr{L}^{-1}\left[\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x}\right]\\&=\varphi(t)*\mathscr{L}^{-1}\left[\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x}\right]\end{aligned}\tag{7.6.1}$$

由拉普拉斯变换表查得

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x}\right]=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\tag{7.6.2}$$

而
$$\mathscr{L}^{-1}\left[\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[s\cdot\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x}\right]$$

由拉普拉斯变换的微分性质

$$\mathscr{L}[f'(t)]=s\mathscr{L}[f(t)]-f(0),$$

有
$$f'(t)=\mathscr{L}^{-1}\{s\mathscr{L}[f(t)]\}-\mathscr{L}^{-1}[f(0)]\tag{7.6.3}$$

如果取 $f(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$，则由式(7.6.2)知

$$\mathscr{L}[f(t)]=\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x}$$

又因 $f(0)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=0$，故有 $\mathscr{L}^{-1}[f(0)]=0$

这样，式(7.6.3)化为 $f'(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[s\cdot\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x}\right]$，即

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}^{-1}\left[\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[s\cdot\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x}\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\right]\\&=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\cdot\frac{-x}{4at\sqrt{t}}\end{aligned}$$

$$= \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{t\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \qquad (7.6.4)$$

将式(7.6.4)代入式(7.6.1)得

$$u(x,t) = \varphi(t) * \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{t\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$$

$$= \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \varphi(\tau) \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \mathrm{d}\tau \qquad (7.6.5)$$

例 31 考虑一端固定，另一端（当 $x \to \infty$）允许沿 x 轴方向自由运动的半无界弦的振动，设作用在其上的外力为 $f(t)$，弦开始时是静止的，则弦的振动满足定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t) \quad 0 < x < +\infty \quad t > 0 \\ u|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \\ u|_{x=0} = 0, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

试解之。

解： 由于 $t>0$ 且给出了初始条件，故可以考虑关于变量 t 对 $u(x,t)$ 施行拉普拉斯变换。令

$$U(x,s) = \mathscr{L}[u(x,t)],\ F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$$

将泛定方程两端关于变量 t 施行拉普拉斯变换，由微分性质并利用初始条件，得常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}x^2} - \frac{s^2}{a^2} U = -\frac{F(s)}{a^2}$$

它的通解是

$$U(x,s) = A e^{\frac{s}{a}x} + B e^{-\frac{s}{a}x} + \frac{F(s)}{s^2}$$

对边界条件施行拉普拉斯变换得

$$U(0,s) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{d}U(x,s)}{\mathrm{d}x} = 0$$

由第二个条件知，这时必须有 $A=0$，故

$$U(x,s)=Be^{-\frac{s}{a}x}+\frac{F(s)}{s^2}$$

再由第一个条件得 $B=-\frac{F(s)}{s^2}$

所以
$$U(x,s)=\frac{F(s)}{s^2}(1-e^{-\frac{s}{a}x}) \tag{7.6.6}$$

对 $U(x,s)$ 求拉普拉斯逆变换即得原定解问题的解 $u(x,t)$

1）若 $f(t)=f_0$（常数）时，

$$U(x,s)=f_0\left(\frac{1}{s^3}-\frac{1}{s^3}e^{-\frac{s}{a}x}\right)$$

由延迟定理法，其拉普拉斯逆变换是

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{f_0}{2}\left[t^2-\left(t-\frac{x}{a}\right)^2\right] & \text{当 } t\geqslant\frac{x}{a}\\ \frac{f_0}{2}t^2 & \text{当 } t<\frac{x}{a}\end{cases}$$

2）若 $f(t)=\cos kt$（k 是常数）时，

$$F(s)=\mathscr{L}[\cos kt]=\frac{s}{s^2+k^2}$$

式(7.6.6)变为

$$\begin{aligned}U(x,s)&=\frac{1}{s(s^2+k^2)}[1-e^{-\frac{s}{a}x}]\\&=\frac{1}{k^2}\left[\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+k^2}\right][1-e^{-\frac{s}{a}x}]\end{aligned} \tag{7.6.7}$$

因为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+k^2)}\right]&=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+k^2}\right)\right]\\&=\frac{1}{k^2}(1-\cos kt)=\frac{1}{k^2}\sin^2\frac{k}{2}t\end{aligned}$$

如果记 $\psi(t)=\sin^2\frac{k}{2}t$ 由延迟定理法，式(7.6.7)的拉普拉斯逆变换是

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{2}{k^2}\left[\psi(t)-\psi\left(t-\dfrac{x}{a}\right)\right] & \text{当 } t\geqslant\dfrac{x}{a}\\ \dfrac{2}{k^2}\psi(t) & \text{当 } t<\dfrac{x}{a}\end{cases}$$

例 32 设有一长为 l 的均匀杆，在 $x=0$ 的一端固定，在另一端 $x=l$ 处受外力

$$f(t)=\begin{cases}f_0 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

作用杆在初始时刻处于静止状态，求杆在 $t>0$ 时的纵向位移。

解： 杆的纵向振动可归结为以下定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \quad 0<x<l \quad t>0\\ u\big|_{t=0}=0,\quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0\\ u\big|_{x=0}=0,\quad \dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}=\dfrac{f_0}{E} \quad (E\text{ 为弹性模量})\end{cases}$$

其中 a、f_0 和 E 都是常数，令

$$U(x,s)=\mathscr{L}[u(x,t)]$$

对泛定方程关于变量 t 施行拉普拉斯变换，并注意到初始条件得

$$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}-\frac{s^2}{a^2}U(x,s)=0$$

对边界条件进行拉氏变换得

$$U(0,s)=0,\quad \frac{\mathrm{d}U}{\partial x}\bigg|_{x=l}=\frac{f_0}{Es}$$

这个常微分方程的通解是 $U(x,s)=A\mathrm{e}^{\frac{s}{a}x}+B\mathrm{e}^{-\frac{s}{a}x}$，应用边界条件有

$$\begin{cases}A+B=0\\ \dfrac{s}{a}\mathrm{e}^{\frac{s}{a}l}A+\left(-\dfrac{s}{a}\mathrm{e}^{-\frac{s}{a}l}\right)B=\dfrac{f_0}{Es}\end{cases}$$

解代数方程组得

$$A=-B=\frac{af_0}{Es^2(e^{\frac{s}{a}l}+e^{-\frac{s}{a}l})}$$

所以

$$U(x,s)=\frac{af_0(e^{\frac{s}{a}x}-e^{-\frac{s}{a}x})}{Es^2(e^{\frac{s}{a}l}+e^{-\frac{s}{a}l})}$$

$$=\frac{af_0}{Es^2}\Big[e^{-\frac{s(l-x)}{a}}-e^{-\frac{s(l+x)}{a}}-e^{-\frac{s(3l-x)}{a}}$$

$$+e^{-\frac{s(3l+x)}{a}}\Big]\cdot\frac{1}{1-e^{-\frac{4ls}{a}}}$$

因为$U(x,s)$的分母中有$1-e^{-\frac{4ls}{a}}$这一项，故拉普拉斯逆变换$u(x,t)$是以$\frac{4l}{a}$为周期的函数，因而定解问题的解化简后可写成以下形式：

$$u(x,t)=\begin{cases}0 & 0<t<\frac{l-x}{a}\\ \frac{af_0}{E}\left(t-\frac{l-x}{a}\right) & \frac{l-x}{a}<t<\frac{l+x}{a}\\ \frac{af_0}{E}\left(\frac{2x}{a}\right) & \frac{l+x}{a}<t<\frac{3l-x}{a}\\ \frac{af_0}{E}\left(-t+\frac{3l+x}{a}\right) & \frac{3l-x}{a}<t<\frac{3l+x}{a}\\ 0 & \frac{3l+x}{a}<t<\frac{4l}{a}\end{cases}$$

图 7-7 将这个结果清楚地显示了出来。

例 33 设一端$x=0$固定，长为l的均匀杆，另一端由静止状态开始受一与杆轴方向一致的力$F=A\sin\omega t$的力作用，求杆作纵振动的规律。此问题归结为一维波动方程的混合问题

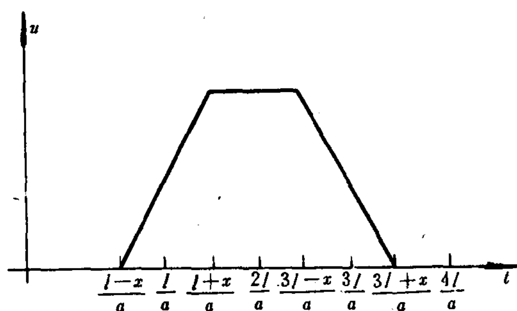


图 7-7

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad 0 < x < l \quad t > 0 \\
u\big|_{t=0} = 0 \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \quad 0 < x < l \\
u\big|_{x=0} = 0 \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = \dfrac{A}{E}\sin\omega t \quad t > 0
\end{cases}
$$

其中 E 为扬氏模量。

解： 令 $U(x,s)=\mathscr{L}[u(x,t)]$，变换波动方程并利用初始条件，我们得到

$$
\frac{\mathrm{d}^2 U(x,s)}{\mathrm{d}x^2} - \left(\frac{s}{a}\right)^2 U(x,s) = 0
$$

对边值条件施行拉普拉斯变换得

$$
U(0,t) = \mathscr{L}[0] = 0
$$

$$
\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=l} = \mathscr{L}\left[\frac{A}{E}\sin\omega t\right] = \frac{A\omega}{E(s^2+\omega^2)}
$$

解上述常微分方程的边值问题得

$$
U(x,s) = \frac{Aa\omega \operatorname{sh}\dfrac{s}{a}x}{Es(s^2+\omega^2)\operatorname{ch}\dfrac{s}{a}l}
$$

对 $U(x,s)$ 施行拉普拉斯逆变换得

$$u(x,t)=\mathscr{L}^{-1}[U(x,s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{Aa\omega\text{sh}\,\frac{s}{a}x}{ES(s^2+\omega^2)\text{ch}\,\frac{s}{a}l}\right]$$

$$=\sum_k \underset{s=s_k}{\text{Res}}\left[\frac{Aa\omega\text{sh}\,\frac{s}{a}x}{Es(s^2+\omega^2)\text{ch}\,\frac{s}{a}l}e^{st}\right]$$

其中 s_k 是 $U(x,s)$的极点，由 $s(s^2+\omega^2)\text{ch}\,\frac{s}{a}l=0$ 求得

$$s=0\quad \pm i\omega\quad \pm i\frac{a}{l}\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi,\ (k=1,2,3,\cdots)$$

因为

$$\frac{\text{sh}\,\frac{s}{a}x}{s}=\frac{1}{s}\left[\left(\frac{x}{a}s\right)+\frac{1}{3!}\left(\frac{x}{a}s\right)^3+\cdots\right]$$

$$=\frac{x}{a}+\frac{1}{3!}\left(\frac{x}{a}\right)^3 s^2+\cdots$$

故 $s=0$ 不是 $U(x,s)$的极点。

$$s=\pm i\omega,\ \pm i\frac{a}{l}\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi\quad (k=1,2,3,\cdots)$$

均为 $U(x,s)$的一阶极点。

往求留数　根据留数计算法

$$\underset{s=s_k}{\text{Res}}\left[\frac{A(s)}{B(s)}e^{st}\right]=\frac{A(s_k)}{B'(s_k)}e^{s_k t}$$

当 $s=\pm i\omega$ 时，取 $B(s)=s^2+\omega^2$。$A(s)=\dfrac{\text{sh}\,\frac{x}{a}s}{s}\cdot\dfrac{1}{\text{ch}\,\frac{s}{a}l}$注意到

$\dfrac{\text{sh}\,\frac{s}{a}x}{s}$，$s^2+\omega^2$，$\text{ch}\,\frac{s}{a}l$ 均为偶函数且 $\text{sh}iz=i\sin z$，$\text{ch}iz=\cos z$。有

$$\frac{e^{\pm i\omega t}}{B'(\pm i\omega)}=\frac{e^{\pm i\omega t}}{\pm 2i\omega},A(\pm i\omega)=\frac{i\sin\frac{\omega}{a}x}{i\omega}\cdot\frac{1}{\cos\frac{\omega}{a}l}$$

于是

$$\underset{s=-i\omega}{\mathrm{Res}}\frac{Aa\omega\,\mathrm{sh}\frac{s}{a}x}{Es(s^2+\omega^2)\mathrm{ch}\frac{s}{a}l}e^{st}+\underset{s=i\omega}{\mathrm{Res}}\frac{Aa\omega\,\mathrm{sh}\frac{s}{a}x}{Es(s^2+\omega^2)\mathrm{ch}\frac{s}{a}l}$$

$$=\frac{Aa}{E\omega\cos\frac{\omega}{a}l}\sin\frac{\omega}{a}x\sin\omega t$$

当 $s=s_k=\pm i\frac{a}{l}\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi$ 时,取 $B(s)=\mathrm{ch}\frac{s}{a}l$

$A(s)=\dfrac{\mathrm{sh}\frac{s}{a}x}{s}\cdot\dfrac{1}{s^2+\omega^2}$则

$$\frac{e^{s_kt}}{B'(s_k)}=\frac{e^{s_kt}}{\frac{l}{a}\mathrm{sh}\frac{s_k}{a}l}=\frac{e^{\pm\frac{a}{l}\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi it}}{\pm\frac{l}{a}i\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi}=\frac{e^{\pm\frac{a}{l}\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi it}}{\pm\frac{l}{a}i(-1)^{k-1}}$$

$$A(s_k)=\frac{i\sin\frac{x}{l}\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi}{\frac{a}{l}\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi i}\cdot\frac{1}{\omega^2-\left[\frac{a}{l}\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi\right]^2}$$

所以

$$\underset{s=s_k}{\mathrm{Res}}\frac{Aa\omega\,\mathrm{sh}\frac{s}{a}x}{Es(s^2+\omega^2)\mathrm{ch}\frac{s}{a}l}e^{s_kt}+\underset{s=-s_k}{\mathrm{Res}}\frac{Aa\omega\,\mathrm{sh}\frac{s}{a}x}{Es(s^2+\omega^2)\mathrm{ch}\frac{s}{a}l}e^{-s_kt}$$

$$=(-1)^{k-1}\frac{16Aa\omega}{E\pi}l^2\frac{\sin\frac{(2k-1)\pi}{2l}x\sin\frac{(2k-1)a\pi}{2l}t}{(2k-1)[4\omega^2l^2+(2k-1)^2a^2\pi^2]}$$

最后得定解问题的解为

$$u(x,t)=\frac{Aa}{E\omega\cos\frac{\omega}{a}l}\sin\frac{\omega}{a}x\sin\omega t+\frac{16Aa\omega l^2}{E\pi}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\sin\frac{(2k-1)\pi}{2l}x\sin\frac{(2k-1)a\pi}{2l}t}{(2k-1)[4\omega^2l^2+(2k-1)^2\pi^2a^2]}$$

由此可见，用拉普拉斯变换法解边界条件为非齐次的混合问题，较分离变量法优越，因为它省去了把边界条件齐次化这一步。不过，拉普拉斯逆变换一般也较难计算。

习 题 七

1. 求下列函数的富里埃变换

(1) $f(t)=\begin{cases}1-t^2 & t^2<1\\ 0 & t^2\geqslant 1\end{cases}$ (2) $f(t)=\begin{cases}0 & t\leqslant 0\\ e^{-t}\sin 2t & t\geqslant 0\end{cases}$

(3) $f(t)=e^{-\beta t}\cos\omega_0 t\cdot u(t)$， (4) $f(t)=e^{i\omega_0 t}tu(t)$

2. 证明 $\mathscr{F}^{-1}[e^{-a^2\lambda^2 t}]=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{\frac{x^2}{4a^2t}}$

3. 已知 $f_1(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ e^{-t} & t\geqslant 0\end{cases}$， $f_2(t)=\begin{cases}\sin t & 0<t\leqslant\frac{\pi}{2}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

求 $f_1(t)*f_2(t)$。

4. 试用富里埃变换法求解一维波动方程的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0\\ u|_{t=0}=\varphi(x)\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)\end{cases}$$

从而建立达朗贝尔公式。

5. 用富里埃变换求解三维热传导方程的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=0,0<x,y,z<\infty \quad t>0\\ u|_{t=0}=\varphi(x,y,z)\end{cases}$$

6. 求解下列定解问题

(1) $$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \quad (-\infty<x<+\infty,t>0)\\ u|_{t=0}=f(x)\\ u(x,t)\text{ 有界}\end{cases}$$

(2) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - tu & (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u|_{t=0} = f(x) \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Au & (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u|_{t=0} = \delta(x - \xi) & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$

7. 求下列函数的拉普拉斯变换

(1) $f(t)=\sin \dfrac{t}{2}$　　(2) $f(t)=t^2$

(3) $f(t)=e^{-2t}$　　(4) $f(t)=\text{sh}kt$

8. 利用拉普拉斯变换的性质计算下列函数的拉普拉斯变换。

(1) $f(t)=\cos^2 t$　　(2) $f(t)=t^2+te^t$

(3) $f(t)=t\cos at+t\sin at$　　(4) $f(t)=t^n e^{at}-t^{n-1}$

(5) $f(t)=e^{-2t}\sin 6t-5e^{-2t}$

9. 利用反演积分计算下列函数的拉普拉斯逆变换

(1) $F(s)=\dfrac{1}{s(s+a)(s+b)}$　　(2) $F(s)=\dfrac{1}{s^2(s^2-1)}$

(3) $F(s)=\dfrac{1}{(s^2+2s+2)^2}$　　(4) $F(s)=\ln \dfrac{s^2-1}{s^2}$

(提示:先求 $F'(s)$,再找 $f(t)$与 $F'(s)$的关系)

10. 求下列函数的拉普拉斯逆变换

(1) $F(s)=\dfrac{1}{s^2+4}$　　(2) $F(s)=\dfrac{1}{s^4}$

(3) $F(s)=\dfrac{s+3}{(s+1)(s-3)}$　　(4) $F(s)=\dfrac{2s+5}{s^2+4s+3}$

11. 试用拉普拉斯变换求解下列常微分方程及方程组

(1) $y''+9y=6e^{3t}$　$y(0)=y'(0)=0$

(2) $y''-2y'+2y=2e^t\cos t, y(0)=y'(0)=0$

(3) $y^{(4)}+y=2e^t$, $y(0)=y'(0)=y''(0)=y'''(0)=1$

(4) $\begin{cases} y_1'-2y_2'=f(t) \\ y_1'-y_2'+y_2=0 \end{cases}$ 及 $\begin{cases} y_1(0)=y_1'(0)=0 \\ y_2(0)=y_2'(0)=0 \end{cases}$

12. 用拉普拉斯变换法求方程组 $Y'=AY+f(t)$的解 $\varphi(t)$

(1) $\varphi(0)=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, $f(t)=\begin{bmatrix} e^t \\ 1 \end{bmatrix}$

(2) $\varphi(0)=0$, $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}$, $f(t)=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ e^{-t}\end{bmatrix}$

(3) $\varphi(0)=\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}4 & -3\\ 2 & -1\end{bmatrix}$, $f(t)=\begin{bmatrix}\sin t\\ -2\cos t\end{bmatrix}$

13. 用拉普拉斯变换法求解半无界弦振动问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2u=0 & x>0 \quad t>0\\ u|_{t=0}=0 \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0 & x\geqslant 0\\ u|_{x=0}=f(t) \quad \lim\limits_{x\to\infty}u(x,t)=0 & t\geqslant 0\end{cases}$$

其中 $f(t)$为已知的充分光滑函数，且 $f(0)=0$。

14. 求半无界弦受迫振动问题的解

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\cos\omega t & 0<x<\infty \quad t\geqslant 0\\ u|_{t=0}=0 \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0 & 0<x<\infty\\ u|_{x=0}=0 \quad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\partial u}{\partial x}=0\end{cases}$$

15. 用拉普拉斯变换法求解下列定解问题

(1) $$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=x\cos y+ye^x & (x>0,y>0)\\ u|_{x=0}=(y-1)^2\\ u|_{y=0}=x^2+1\end{cases}$$

(2) $$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=e^x\sin x & (x>0,y>0)\\ u|_{x=0}=y^2, u|_{y=0}=xe^x\end{cases}$$

16. 用拉普拉斯变换法解下列混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0<x<4 \quad t>0\\ u|_{x=0}=0 \quad u|_{x=4}=0 & t>0\\ u|_{t=0}=6\sin\dfrac{\pi}{2}x+3\sin\pi x & (0\leqslant x\leqslant\pi)\end{cases}$$

17. 用积分变换法解下列定解问题

$$
(1)\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - hu \quad (x > 0, t > 0, h > 0, a > 0) \\
u|_{t=0} = b \\
u|_{x=0} = 0 \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0
\end{cases}
$$

$$
(2)\quad\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \quad (x > 0, t > 0, a > 0) \\
u|_{t=0} = 0 \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \\
u|_{x=0} = 0 \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0
\end{cases}
$$

$$
(3)\quad\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x,t) \quad (0 < x < \pi, t > 0) \\
u|_{t=0} = 0 \qquad\qquad (0 \leqslant x \leqslant \pi) \\
u|_{x=0} = 0 \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pi} = 0
\end{cases}
$$

第八章　定解问题的近似解法

在前面儿章中，对泛定方程、定解条件比较简单，而区域又很规则的情况下，我们给出了定解问题的解的解析表达式。然而，工程技术中所提出的定解问题，经常出现这种情况，或是区域不太规则；或是泛定方程与定解条件比较复杂，以致很难求出其精确解，这时就可以借助于近似解法。只要近似程度能够满足实际的需要，问题也就算得到了解决。因此，近似方法的研究是很必要的。

本章介绍应用较多的三种近似方法：差分法、变分法和有限元法。

§8.1　差分法

差分法是数学物理方程中常用的数值解法，本节主要介绍差分法的解题步骤，它的基本原理是：首先将问题离散化，用差商代替微商，将微分方程和定解条件都用代数方程来代替。其次，解这些代数方程构成的方程组，得到定解问题的近似解。

1. 基本概念

1）差商

在微分学中，微商被定义为下式的极限

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}$$

上式又可写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x)-y(x-\Delta x)}{\Delta x};$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x-\Delta x)}{2\Delta x}$$

因此，当$|\Delta x|$很小时，有

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} \text{或} \frac{dy}{dx} \approx \frac{y(x) - y(x-\Delta x)}{\Delta x}$$

或
$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{y(x+\Delta x) - y(x-\Delta x)}{2\Delta x}$$

这就是说，微商$\frac{dy}{dx}$用差商来代替，可以有三种形式，我们称

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

为函数$y=y(x)$在点x处的“**向前差商**”，称

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x) - y(x-\Delta x)}{\Delta x}$$

为“**向后差商**”，称

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x+\Delta x) - y(x-\Delta x)}{2\Delta x}$$

为“**中心差商**”。并将它们统称为一阶差商。

下面来考虑由差商代替微商所产生的误差。设函数$y=y(x)$是充分光滑的，由泰勒(Tayler)公式有

$$y(x+\Delta x) = y(x) + y'(x)\Delta x + \frac{(\Delta x)^2}{2!}y''(x) + \frac{(\Delta x)^3}{3!}y'''(x) + \frac{(\Delta x)^4}{4!}y^{(4)}(x) + o(\Delta x)^5$$

$$y(x-\Delta x) = y(x) - y'(x)\Delta x + \frac{(\Delta x)^2}{2!}y''(x) - \frac{(\Delta x)^3}{3!}y'''(x) + \frac{(\Delta x)^4}{4!}y^{(4)}(x) - o(\Delta x)^5$$

去掉高阶项，得到

$$\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}-y'(x)=o(\Delta x)$$

$$\frac{y(x)-y(x-\Delta x)}{\Delta x}-y'(x)=o(\Delta x)$$

$$\frac{y(x+\Delta x)-y(x-\Delta x)}{2\Delta x}-y'(x)=o((\Delta x)^2)$$

由此可见，选取不同的差商去代替微商，所带来的误差也不同。用“向前差商”与“向后差商”代替微商的误差与(Δx)同阶，而用“中心差商”代替微商的误差与$(\Delta x)^2$同阶。

当Δx固定时，差商仍然是x的函数，所以，对这个函数还可以求它的差商。我们称一阶差商的差商为二阶差商，它可以作为二阶导数(微商)的近似值。对于二阶导数当然也可以有不同的差商去替代。一般我们用对称形式的，即向前差商的向后差商(或向后差商的向前差商)来近似二阶导数，即

$$y''\approx\frac{\dfrac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}-\dfrac{y(x)-y(x-\Delta x)}{\Delta x}}{\Delta x}$$

$$=\frac{y(x+\Delta x)-2y(x)+y(x-\Delta x)}{(\Delta x)^2}$$

容易看出

$$\frac{y(x+\Delta x)-2y(x)+y(x-\Delta x)}{(\Delta x)^2}-y''(x)=o((\Delta x)^2)$$

即误差与$(\Delta x)^2$同阶。

对于多元函数的偏导数，类似地也可用差商去近似，例如，对二元函数$u(x,y)$在点(x,y)处有

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial x} \approx \dfrac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x} \\
\dfrac{\partial u}{\partial y} \approx \dfrac{u(x,y+\Delta x)-u(x,y)}{\Delta y} \\
\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \dfrac{u(x+\Delta x,y)-2u(x,y)+u(x-\Delta x,y)}{(\Delta x)^2} \\
\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \dfrac{u(x,y+\Delta y)-2u(x,y)+u(x,y-\Delta y)}{(\Delta y)^2} \\
\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \approx \dfrac{1}{4\Delta x \Delta y}[u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x+\Delta x,y-\Delta y) \\
\quad +u(x-\Delta x,y-\Delta y)-u(x-\Delta x,y+\Delta y)]
\end{cases}
\tag{8.1.1}
$$

2) 差分方程

将泛定方程中的偏导数用差商去代替，就得到了差分方程。下面以三类典型方程为例来建立对应的**差分方程**。

(1)二维拉普拉斯方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

用式(8.1.1)中相应的二阶差商代入泛定方程，就得到

$$
\frac{u(x+\Delta x,y)-2u(x,y)+u(x-\Delta x,y)}{(\Delta x)^2}
+\frac{u(x,y+\Delta y)-2u(x,y)+u(x,y-\Delta y)}{(\Delta y)^2}=0
\tag{8.1.2}
$$

在式(8.1.2)中，涉及到自变量的点共有五点，如图 8-1 所示。因此，它被称为五点差分格式。其误差为

$$o((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)$$

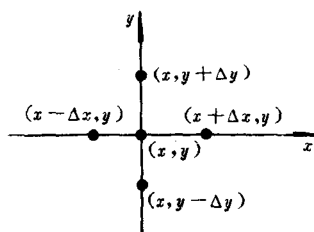


图 8—1

(2)热传导方程的差分格式

一维热传导方程为 $\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$。用式(8.1.1)中相

应的差商代替偏导数得

$$\frac{u(x,t+\Delta t)-u(x,t)}{\Delta t}$$

$$=a^2\frac{u(x+\Delta x,t)-2u(x,t)+u(x-\Delta x,t)}{(\Delta x)^2} \quad (8.1.3)$$

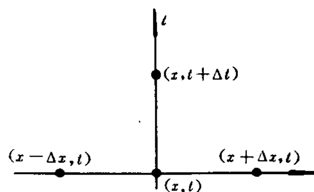


图 8-2

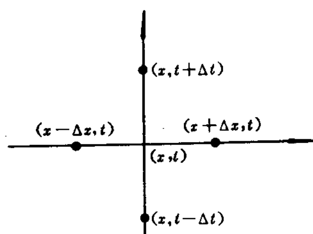


图 8-3

式(8.1.3)中涉及的点有四点，如图 8-2。其误差为 $o(\Delta t)+o((\Delta x)^2)$。

(3)一维波动方程的差分格式。

一维波动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

将式(8.1.1)中相应的差商代入得

$$\frac{u(x,t+\Delta t)-2u(x,t)+u(x,t-\Delta t)}{(\Delta t)^2}$$

$$=a^2\frac{u(x+\Delta x,t)-2u(x,t)+u(x-\Delta x,t)}{(\Delta x)^2} \quad (8.1.4)$$

误差为 $o((\Delta t)^2+(\Delta x)^2)$。式(8.1.4)涉及的点如图 8-3 所示。

在差分方程中，我们采用了与定解问题中相同的函数符号，显然二者是不尽相同的。

若函数 $u(x,t)$ 对任何 $\Delta x,\Delta t$ 都满足某个差分方程，就称此函数为差分方程的解。下面，我们用网络法求这些差分方程的数值解，并通过对拉普拉斯方程第一边值问题进行差分法求解，说明用

差分法求解定解问题的一般步骤。

2. 拉普拉斯方程边值问题的差分解法

考虑平面有界区域 Ω 上的拉普拉斯方程第一边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & (8.1.5) \\ u|_\Gamma = f(x,y) & (8.1.6) \end{cases}$$

其中 Γ 是 Ω 的边界，f 是 Γ 上的已知函数。

如图 8-4、图 8-5 所示，为用差分法求解第一边值问题，首先用平行于坐标轴的两族直线

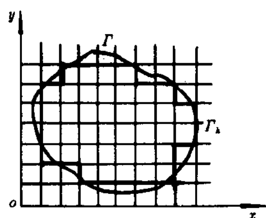


图 8-4

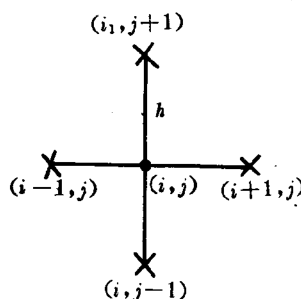


图 8-5

$$\begin{cases} x = xi = ih & (i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \\ y = yj = jh & (j = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \end{cases}$$

将 xoy 平面分割成许多正方形，称为**正方形网络**。网络线的交点称为**节点**，小正方形的边长称为**步长**。取一些与边界 Γ 较接近的网络节点，用它们连成的折线 Γ_h 近似地代替 Γ，记 Γ_h 所包围的全部网络为 Ω_h，显然，它是 Ω 的一个近似的区域，Ω_h 内的节点称为**内节点**，在 Γ_h 上的节点称为**边界节点**。

所谓网络法，就是以 Γ_h 代替 Γ，以 Ω_h 代替 Ω；以差分方程中的函数 u 在各节点的值为未知量，在每个节点上建立一个代数方程而构成代数方程组；以代数方程组代替差分方程及边界条件，解

代数方程组就得到差分方程的未知函数在节点处的近似值。

令 U_{ij}表示 u 在节点(x_i,y_j)处的值，由五点差分格式有

$$\frac{U_{i+1,j}-2U_{ij}+U_{i-1,j}}{h^2}+\frac{U_{i,j+1}-2U_{ij}+U_{i,j-1}}{h^2}=0 \quad (8.1.7)$$

为使差分方程的解能够作为微分方程解的近似值，要求当步长 $h\to 0$时，误差（或称**截断误差**）趋于零，并称这个条件为**相容性条件**。

方程(8.1.7)可简写成

$$U_{ij}=\frac{1}{4}(U_{i+1,j}+U_{i,j+1}+U_{i-1,j}+U_{i,j-1}) \quad (8.1.8)$$

对于网络区域的内节点来说，其周围四个相邻的节点都落在要求解的区域 $\Omega_h+\Gamma_h$ 上，故式(8.1.8)是有意义的。

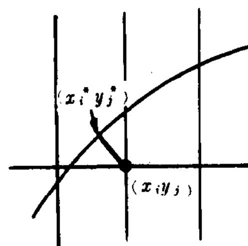


图 8-6

对于网络区域的边界节点$(x_i,y_j)\in\Gamma_h$，注意到边界条件 $u|_\Gamma=f(x,y)$，最简便的办法是取 Γ 上与此节点最邻近的点(x_i^*,y_j^*)处的边界值 f 作为 U_{ij}的值。如图 8-6。即

$$U_{ij}=f(x_i^*,y_j^*)[(x_i,y_j)\in\Gamma_h(x_i^*,y_j^*)\in\Gamma \quad (x_i^*,y_j^*)\text{ 与}(x_i,y_j)\text{ 最邻近}] \quad (8.1.9)$$

于是，拉普拉斯方程的第一边值问题式(8.1.5)、式(8.1.6)就用线性方程式(8.1.8)、式(8.1.9)近似代替。这是一个方程个数与未知量个数相同的线性代数方程组，可以证明，这个方程组的解是存在且唯一的。

我们可以采用直接的方法（如消元法等等）来求解，为保证精确度，步长 h 往往取得很小，致使网节点很多，从而受电子计算机存贮量的限制而产生困难，所以，常用迭代法来解方程组。

最简单的迭代方式是同步迭代法，同步迭代法的步骤如下。

首先，任意给定在网络区域内节点(x_i,y_j)上的数值$\{U_{ij}^0\}$作为

解的零次近似，把这组数代入式(8.1.8)的右端得

$$U_{ij}^{(1)} = \frac{1}{4}[U_{i+1,j}^{(0)} + U_{i,j+1}^{(0)} + U_{i-1,j}^{(0)} + U_{i,j-1}^{(0)}]$$

作为一次近似，如果上式右端涉及到边界节点上的值时，则用式(8.1.9)中的已知值代入(下同)。

其次，由公式

$$U_{ij}^{(k+1)} = \frac{1}{4}[U_{i+1,j}^{(k)} + U_{i,j+1}^{(k)} + U_{i-1,j}^{(k)} + U_{i,j-1}^{(k)}] \ (k = 0,1,2,\cdots) \tag{8.1.10}$$

计算出$\{U_{ij}^{(2)}\}$，如此继续下去就得到一个近似解的序列$\{U_{i,j}^{(k)}\}$($k=0,1,2,\cdots$)。可以证明，不论零次近似如何选取，当$k\to\infty$时，此序列必收敛于所考察的差分问题的解。所以，当k充分大时，$\{U_{i,j}^{(k)}\}$就给出所要求的近似解。通常，当第k次近似值$U_{i,j}^{(k)}$与第$k-1$次近似$U_{i,j}^{(k-1)}$之差已经小于预定的误差限ε($\varepsilon>0$)时，即

$$\max_{i,j}|U_{i,j}^{(k)} - U_{i,j}^{(k-1)}| < \varepsilon \text{ 或 } \frac{1}{N}\sum_{i,j}|U_{i,j}^{(k)} - U_{i,j}^{(k-1)}| < \varepsilon$$

就可结束迭代，$\{U_{i,j}^{(k)}\}$就可取作$U_{i,j}$的近似解。

为了加快迭代收敛的速度，常采用异步迭代法，它与同步迭代法的区别在于：在计算第$k+1$次近似值$U_{i,j}^{(k+1)}$时，如果某些邻点的$k+1$次近似值已在前面求得，可直接把这些值代入到式(8.1.10)的右端，代替原来应代入的第k次近似值，为此，在用异步迭代法求解时，需将网络区域中的节点按一定的顺序排列，一般常采用自然顺序排列，即以最下排的最左一个内节点为第一号，从左到右，由下至上依次进行迭代，参看图8-7。这时迭代公式为

$$U_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{4}(U_{i+1,j}^{(k)} + U_{i,j+1}^{(k)} + U_{i-1,j}^{(k+1)} + U_{i,j-1}^{(k+1)}) \tag{8.1.11}$$

当然，如果右端中涉及边界值时仍用边界值。

	11	12	13	14	15
	6	7	8	9	10
	1	2	3	4	5

图 8-7

例 1 试用差分法求解下列问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad 0\leqslant x\leqslant 4 \quad 0\leqslant y\leqslant 3\\ u(0,y)=u(0,3)=0\\ u(4,y)=\dfrac{1}{3}y(3-y)\\ u(x,0)=\dfrac{1}{4}x(4-x)\end{cases}$$

要求精确到小数第二位。

解：取步长 $h=1$，于是 $\Omega_h=\Omega$，$\Gamma_h=\Gamma$。边界节点共 14 个，内节点 6 个，如图 8-8。将内节点按自然顺序编成 U_1，U_2，U_3，U_4，U_5，U_6，在 $x=0$ 及 $y=3$ 上的边界节点处的值都是 0，在 $y=0$ 的边界节点处，按 $u=\frac{1}{4}x(4-x)$ 计算，自左到右分别为 0，0.75，1，0.75，0；在 $x=4$ 上的边界节点处的值按 $u=\frac{1}{3}y(3-y)$ 计算，分别为 0，0.67，0.67，0（小数点第三位四舍五入）。这些值都已注明在图 8-8 相应节点的旁边。

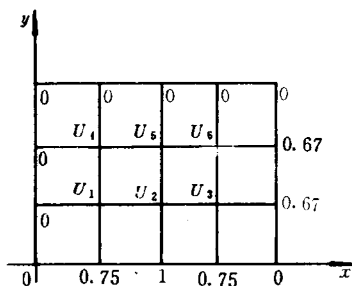


图 8-8

(1) 用同步迭代法计算

取 $U_i^{(0)}=0$，$i=1,2,3,4,5,6$，按公式(8.1.10)计算，第一次迭

代值为周围四点的零次迭代值的算术平均值，取到第二位小数（小数第三位四舍五入），写在零次值的下面如图 8-9，如此继续下去，

0 U_4	0 U_5	0 U_6	0	0
0 U_1	0　0.15 0　0.16　0.16 0.05　0.16 0.09　0.16 0.12　0.16 0.14　0.16 U_2	0 0　0.26　0.28 0.11　0.27　0.28 0.18　0.27 0.22　0.27 0.24　0.28 U_3	0 0.17　0.37　0.39 0.26　0.38　0.39 0.31　0.38 0.34　0.38 0.36　0.38	0.67
0	0 0.19　0.36　0.37 0.25　0.36　0.37 0.30　0.37 0.33　0.37 0.34　0.37	0 0.25　0.54　0.56 0.39　0.55　0.56 0.46　0.55 0.50　0.56 0.53　0.56	0 0.36　0.58　0.59 0.46　0.58　0.59 0.52　0.59 0.55　0.59 0.57　0.59	0.67
0	0.75	1	0.75	0

图 8-9

直至第十二迭代，已不能再改进精确度，于是得到

$$U_1^{(12)} = 0.37 \quad U_2^{(12)} = 0.56 \quad U_3^{(12)} = 0.59$$

$$U_4^{(12)} = 0.16 \quad U_5^{(12)} = 0.28 \quad U_6^{(12)} = 0.39$$

零次近似值的选取，对迭代收敛的速度是有影响的。例如上例中，若取原来边界值的"平均值"作为零次近似值，即

$$U_i^{(0)} = \frac{1}{4}(0 \times 9 + 0.75 \times 2 + 1 + 0.67 \times 2) = 0.27$$

$$i = 1, 2, \cdots, 6.$$

再按上述方法计算，只要迭代 10 次即可得到解，如图 8-10。

（2） 异步迭代法计算

取 $U_i^{(0)} = 0.27, i = 1,2,3,4,5,6$。依自然顺序，利用公式(8.1.11)计算，并将算得的各次迭代值记录在图 8-11 上。由此可见，异

步迭代法收敛速度确实比同步迭代法快很多。它仅需进行 6 次迭代，就能得到所要求的解。

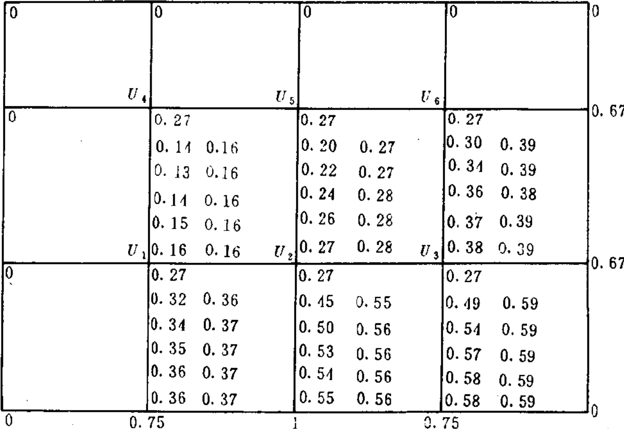


图 8-10

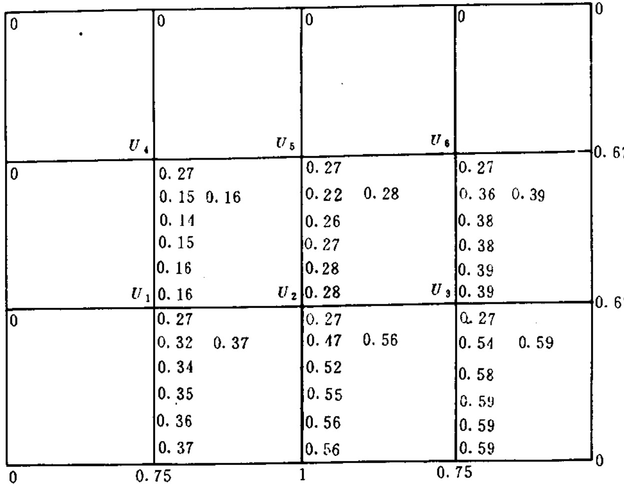


图 8-11

如果应用电子计算机来完成解方程组之任务，用异步迭代法计算到小数点第六位，算到第14次迭代就能得到解

$$U_1 = 0.367149 \qquad U_2 = 0.557970$$

$$U_3 = 0.589371 \qquad U_4 = 0.160627$$

$$U_5 = 0.275362 \qquad U_6 = 0.382850$$

实际应用中，在求解区域的边界上，还常常给出第二类或第三类边界条件，第二类、第三类边界条件可表为

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\bigg|_{\Gamma} = f(x,y)\bigg|_{\Gamma} \tag{8.1.12}$$

其中 $\sigma(x,y)$ 及 $f(x,y)$ 在 Γ 上是已知函数，且 $\sigma \geqslant 0$，$\frac{\partial u}{\partial n}$ 表示 u 的外法线方向，当 $\sigma=0$ 时，式(8.1.12)为第二类边界条件。

为了列出相应于边界条件式(8.1.12)的差分方程，对网络区域边界 Γ_h 的任一节点 $P(x_i, y_j)$，从它出发向边界曲线 Γ 作垂线交 Γ 于点 P^*，设此垂线与 x 轴正向的夹角为 α，如图 8-12。

由于外法向微商

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos \hat{nx} + \frac{\partial u}{\partial y}\cos \hat{ny}$$

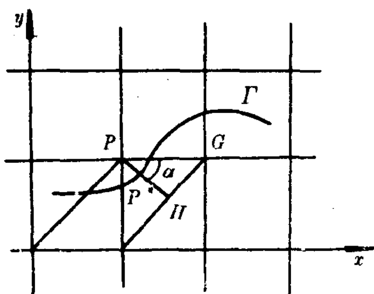


图 8-12

其中 $\bar{n}$ 为区域的外法线方向。因为 $P\overline{P}^*$ 是边界曲线 Γ 过点 P^* 的垂线，所以，$\overline{P}^*P$ 的方向就是 P^* 点处的外法线方向，故有

$$\cos \hat{ny} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$

$$\cos \hat{nx} = \cos(\pi - x) = -\cos\alpha$$

用差商

$$\frac{U(G) - U(P)}{h} \text{ 及 } \frac{U(P) - U(F)}{h}$$

代替$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$。以 $f(P^*)$代替 $f(P)$，以 $\sigma(P^*)$代替 $\sigma(P)$，则式(8.1.12)化为

$$-\frac{U(G) - U(P)}{h}\cos\alpha + \frac{U(P) - U(F)}{h}\sin\alpha + \sigma(P^*)U(P) = f(P^*)$$

将上式改写成

$$U(P) = \frac{U(G)\cos\alpha + U(F)\sin\alpha + hf(P^*)}{\cos\alpha + \sin\alpha + h\sigma(P^*)} \quad (8.1.13)$$

对每一个边界节点，都可以列出如式(8.1.13)的差分方程。将这些方程同所有内节点对应的方程一并构成方程组，同样得到一个方程个数等于未知量个数的线性代数方程组。

3. 波动方程第一类边界条件混合问题的差分解法

考察弦振动方程的混合问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad 0 < x < l \quad 0 < t < T & (8.1.14) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) & (8.1.15) \\ u|_{x=0} = \mu_1(t) \quad u|_{x=l} = \mu_2(t) & (8.1.16) \end{cases}$$

作两族平行线

$$x = x_i = i\Delta x \quad i = 0,1,2,\cdots,m$$

$$t = t_j = j\Delta t \quad j = 0,1,2,\cdots,m$$

其中 $\Delta x = \frac{l}{m}, \Delta t = \frac{T}{n}$。这两族直线把平面区域 $0<x<l, 0<t<T$ 分成矩形网格。如图 8-13。

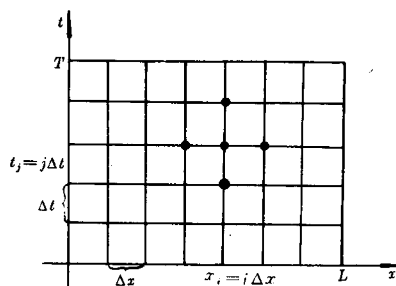


图 8-13

记内节点(x_i,y_j)处 u 的近似值为 U_{ij}，$i=1,2,3,\cdots,m$，$j=1$，$2,3,\cdots,n$。在这此点处的导数$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$及$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$分别用差商

$$\frac{u(x_i,t_j+\Delta t)-2u(x_i,t_j)+u(x_i,t_j-\Delta t)}{(\Delta t)^2}$$

和

$$\frac{u(x_i+\Delta x,t_j)-2u(x_i,t_j)+u(x_i-\Delta x,t_j)}{(\Delta x)^2}$$

代替。于是微分方程(8.1.14)就用下列差分方程

$$\frac{U_{i,j+1}-2U_{ij}+U_{i,j-1}}{(\Delta t)^2}-a^2\frac{U_{i+1,j}-2U_{ij}+U_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}=0$$

所代替。记 $\omega=a\dfrac{\Delta t}{\Delta x}$，即有

$$U_{i,j+1}=\omega^2(U_{i-1,j}+U_{i+1,j})+2(1-\omega^2)U_{ij}-U_{i,j-1}$$

或写作

$$U_{i,j+1}=2U_{ij}-U_{i,j-1}+\omega^2(U_{i+1,j}+U_{i-1,j}-2U_{ij})$$

$$i=1,2,3,\cdots,m-1;j=1,2,3,\cdots,n-1 \quad (8.1.17)$$

由初始条件式(8.1.15)即得

$$U_{i,0}=\varphi(x_i) \quad i=1,2,3,\cdots,m-1 \qquad (8.1.18)$$

$$U_{i,1}-U_{i,0}=\psi(x_i)\Delta t$$

即 $\qquad U_{i,1} = U_{i,0} + \psi(x_i)\Delta t \quad i - 1,2,3,\cdots,m-1$ (8.1.19)

再由边界条件式(8.1.16)得

$$U_{0,j} = \mu_1(j\Delta t) \quad U_{m,j} = \mu_2(j\Delta t) \qquad (8.1.20)$$

由式(8.1.17)、式(8.1.18)、式(8.1.19)和式(8.1.20)组成差分方程定解问题。在差分方程式(8.1.17)中涉及到五个节点，第 $j+1$ 排的内节点处的值，是由第 j 排相邻三个节点处的值和第 $j-1$ 排的相邻一个节点处的值决定的。

由式(8.1.18)知，$k=0$ 时这一排的值 $U_{i,0}$ 都是已知的，由式(8.1.19)知 $U_{i,1}=U_{i,0}+\psi(x_i)\Delta t$，从而 0 排节点与 1 排节点处的值已求得，利用 $j=0$ 及 $j=1$ 两排节点处 $U_{i,j}$ 的值及公式(8.1.17)就可求出 $j=2$ 那一排上所有内节点 $U_{i,2}$ 的值。如此一步一步逐排计算，就能求出所有内节点处 $U_{i,j}$ 的值。

例 2 试用差分法求下列混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad 0 < x < 1 \quad t > 0 \\ u|_{t=0} = \sin\pi x, \ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = x(1-x) \\ u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0 \end{cases}$$

解：取 $\Delta x = 0.2, \omega = \dfrac{a\Delta x}{\Delta t} = 1$，则 $\Delta t = 0.2$，由式(8.1.17)、式(8.1.18)、式(8.1.19)和式(8.1.20)得相应的差分方程的定解问题为

$$\begin{cases} U_{i,j+1} = -U_{i,j-1} + U_{i+1,j} + U_{i-1,j} \quad (i = 1,2,3,4; j = 1,2) \\ U_{i,0} = \sin(\pi \cdot i\Delta x) \\ U_{i,1} = \sin(\pi \cdot i\Delta x) + i\Delta x(1 - i\Delta x)\Delta t \\ U_{0,j} = 0, U_{5,j} = 0 \quad j = 1,2,3 \end{cases}$$

第 0 排边界($j=0$)由 $U_{i,0}=\sin(0.2i\pi)$ 得

$$U_{0,0} = 0 \quad U_{1,0} = 0.58779 \quad U_{2,0} = 0.95106$$

$$U_{3,0} = 0.95106 \quad U_{4,0} = 0.58779 \quad U_{5,0} = 0$$

第一排，由 $U_{i,1}=\sin\frac{i}{5}\pi+0.2i(1-0.2i)0.2$ 计算

$$U_{0,1}=0 \quad U_{1,1}=0.61979 \quad U_{2,1}=0.99906$$

$$U_{3,1}=0.99906 \quad U_{4,1}=0.61979 \quad U_{5,1}=0$$

第二排、第三排由 $U_{i,j+1}=-U_{i,j-1}+U_{i+1,j}+U_{i-1,j}$ 计算($j=1,2$)

计算结果如表 8-1 所示

表 8-1

$t\uparrow$						
$j=3$	0	0.04800	0.08000	0.08000	0.04800	0
2	0	0.41127	0.66779	0.66779	0.41127	0
1	0	0.61979	0.99906	0.99906	0.61979	0
0…	0	0.58779	0.95106	0.95106	0.58779	…→x
	$i=0$	1	2	3	4	5

当节点数量很大时，上述计算可利用电子计算机，根据计算步骤编制计算框图，采用某种算法语言实现上述计算。

可以证明，当 $\omega=a\frac{\Delta t}{\Delta x}\leqslant 1$ 时，差分格式(8.1.17)～式(8.1.20)不仅是稳定的，而且是收敛的。在定解条件满足一定光滑性条件下，此解必收敛到定解问题式(8.1.14)～式(8.1.16)的解 u。

差分格式是稳定的，意指：差分方程的解由于舍入误差的影响所产生的偏差，可以得到控制。精确的定义可在参考文献[1]中找到。

4. 热传导方程的差分格式

考察一维热传导方程的混合问题

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0<x<l,0<t<T)\\ u|_{t=0}=\varphi(x) & (0<x<l)\\ u|_{x=0}=\mu_1(t),u|_{x=l}=\mu_2(t) & 0\leqslant t<T\end{cases}\tag{8.1.21}$$

为保证解的连续性，所给的初始条件与边界条件须满足 $\varphi(0)=\mu(0)$，$\varphi(l)=\mu(0)$。即相容性条件。为了列出混合问题(8.1.21)的差分格式，作两族平行线

$$x = x_i = i\Delta x, i = 0,1,2,\cdots,N$$

$$t = t_j = j\Delta t, j = 0,1,2,\cdots,\left[\frac{T}{\Delta t}\right]$$

其中 $\Delta x=\dfrac{l}{N}$，$M=\left[\dfrac{T}{\Delta T}\right]$。这两族直线形成的矩形网络将求解区域 $(0\leqslant x\leqslant l, 0\leqslant t\leqslant T)$ 覆盖起来，如图 8-14。

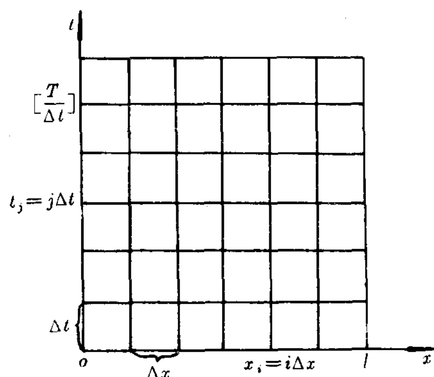


图 8-14

记内节点 (x_i,t_j) 处 u 的近似值为 $U_{i,j}$，$i=1,2,\cdots,N-1$，$j=1,2,\cdots,\left[\dfrac{T}{\Delta t}\right]$。分别用差商

$$\frac{u(x_i,t_j)-u(x_i,t_j-\Delta t)}{\Delta t}$$

和 $$\frac{u(x_i+\Delta x,t_j-\Delta t)-2u(x_i,t_j-\Delta t)+u(x_i-\Delta x,t_j-\Delta t)}{(\Delta x)^2}$$

代换这些点处的偏导数 $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ 和 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，得相应的差分方程

$$\frac{U_{i,j}-U_{i,j-1}}{\Delta t}=a^2\frac{U_{i-1,j-1}-2U_{i,j-1}+U_{i+1,j-1}}{(\Delta x)^2}$$

$$i=1,2,3,\cdots,N-1 \quad j=1,2,3,\cdots,\left[\frac{T}{\Delta t}\right]$$

式(8.1.21)中的初始条件与边界条件可分别化为

$$U_{i,0}=\varphi(i\Delta x) \quad i=0,1,2,\cdots,N$$

$$U_{0,j}=\mu_1(j\Delta t) \quad U_{N,j}=\mu_2(j\Delta t) \quad j=1,2,\cdots,\left[\frac{T}{\Delta t}\right]$$

记 $\omega=a^2\dfrac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$，则差分格式可简写成

$$\begin{cases} U_{ij}=\omega(U_{i-1,j-1}+U_{i+1,j-1})+(1-2\omega)U_{i,j-1} & (8.1.22) \\ U_{i,0}=\varphi(i\Delta x) \quad i=0,1,2,\cdots,N & (8.1.23) \\ U_{0,j}=\mu_1(j\Delta t) \quad U_{N,j}=\mu_2(j\Delta t) & \\ \qquad j=1,2,3,\cdots,\left[\dfrac{T}{\Delta t}\right] & (8.1.24) \end{cases}$$

由式(8.1.23)，第0排节点处的值已知，利用式(8.1.22)第一排内节点处的值可由0排节点处的值计算出来，又由式(8.1.24)知，第一排边界节点处的值已知，所以第一排全部节点处的值都已求得，这样逐排计算下去，可以求得所有内节点处的值 U_{ij}。

可以证明，只要定解问题式(8.1.21)的解 $u(x,t)$ 在区域 $\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant l,0\leqslant t\leqslant T\}$ 中存在，连续且有有界的偏导数 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$，$\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}$，则当 $\omega=a^2\dfrac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，差分格式(8.1.22)～式(8.1.24)是稳定的，且它的解 U 收敛于定解问题式(8.1.21)的解 u。

§8.2 变分方法

变分法是数学物理方程中的一个重要方法，本节简要介绍变分问题直接解法中最重要的两种：端利-里兹法和迦辽金法。现在先叙述变分问题。

1. 变分问题

设 $M_0(x_0,y_0)$ 和 $M_1(x_1,y_1)$ 是 xoy 平面上的两个固定点。连接这两点的任一光滑曲线 C 的方程 $y=y(x)$ 满足条件 $y_0=y(x_0)$，$y_1=y(x_1)$，弧段 $\overset{\frown}{M_0M_1}$ 的长度是

$$J=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$$

显然，数值 J 依赖于函数 $y(x)$，即

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$$

试问：$y=y(x)$ 是怎样的函数时，$J[y]$ 取得极小值，图 8-15。并称这个问题为短程线问题。

由于数量 $J[y]$ 是依赖于函数 $y=y(x)$ 的，这类依赖于函数的函数叫做泛函，于是有

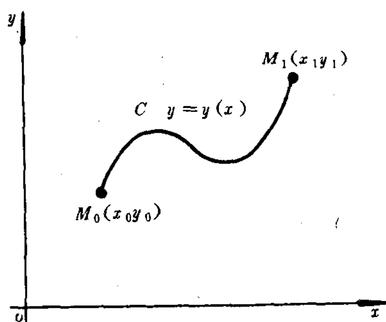


图 8-15

定义 1 设 $\{y(x)\}$ 是已给的具有某种共同性质的函数集，如果对集中任一函数 $y(x)$ 恒有某个确定的数与之对应，记为 $J[y(t)]$ 或 $J[y]$，则称 $J[y]$ 是定义于集 $\{y(x)\}$ 上的一个**泛函**。

这个定义也可以推广到多元变量的情形，例如，$\{f(x,y,z)\}$ 是空间域 Ω 上的一类一阶连续可微的函数，则

$$J[f]=\iiint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2+2f\right]\mathrm{d}\sigma$$

就是定义在某三元函数集上的一个泛函。

由此可见，上述短程线问题实质上就是泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+[y'(x)]^2}\mathrm{d}x$$

的极值问题。其定义域为在区间$[x_0,x_1]$上具有一阶连续导数且满足$y(x_0)=y_0, y(x_1)=y_1$的函数集合$\{y(x)\}$。即求

$$y^*(x)\in\{y(x)\}\text{ 使得 }J[y^*]=J_{\min}$$

在微积分学中我们知道，函数极值是函数的局部性质，即$f(x)$在x_0处取得极小值是指对x_0的邻域$\delta(x_0)$中的任一点x，都有$f(x_0)\leqslant f(x)$，(极大值时，不等号相反)。类似地我们可以定义泛函的极值。首先引入函数距离的概念。

零级距离 设$y(x), y_1(x)$在区间(a,b)内有定义，我们称$\sup\limits_{x\in(a,b)}|y(x)-y_1(x)|$为函数$y$与$y_1$的**零级距离**。

一级距离 设$y(x)$、$y_1(x)$在区间(a,b)内可导，我们称

$$\max\{\sup_{x\in(a,b)}|y(x)-y_1(x)| \quad \sup_{x\in(a,b)}|y'(x)-y'_1(x)|\}$$

为函数y与y_1的**一级距离**。

m **级距离** 设$y(x)$、$y_1(x)$在区间(a,b)内具有直到m阶的导数，取

$$\sup_{x\in(a,b)}|y(x)-y_1(x)|,\quad \sup_{x\in(a,b)}|y'(x)-y'_1(x)|,\cdots,$$

$$\sup_{x\in(a,b)}|y^{(m)}(x)-y_1^{(m)}(x)|$$

中最大的一个数，叫做函数y_1与y的***m*** **级距离**。

现在我们可以定义函数$y_0(x)$的邻域。

零级邻域 函数$y_0(x)$的零级ε邻域是指：与函数$y_0(x)$的零级距离小于正数ε的函数全体，记作$U_\varepsilon^{(0)}(y_0)$。

一级邻域 函数$y_0(x)$的一级ε邻域是指：与函数$y_0(x)$的一级距离小于正数ε的函数全体，记作$U_\varepsilon^{(1)}(y_0)$。

定义 2 设$J[y]$是定义在函数类$\{y(x)\}$上的泛函，如果存在一个$y_0\in\{y(x)\}$及一个$\varepsilon>0$，使得对一切$y\in U_\varepsilon(y_0)$成立不等式

$$J[y_0]\leqslant J[y]$$

则称泛函 $J[y]$ 在 y_0 处取得**相对极小值**(相对极大值情况时，不等号相反)。

泛函数的相对极小(极大)值，相当于普通函数的极小(极大)值。

定义 3 设 $y_0(x)\in\{y(x)\}$，$y(x)$ 为函数类 $\{y(x)\}$ 中的任一函数，如果泛函 $J[y_0]\leqslant$(或$\geqslant$)$J[y]$，则说泛函数 $J[y]$ 在 $y_0(x)$ 上取得了绝对极小值(或绝对极大值)。

泛函在某函数类上的绝对极值，相当于普通函数在某个域上的最小(最大)值。

泛函的极值问题又称为**变分问题**。

2. 基本引理、极值的必要条件

基本引理 设 $f\in c^0([x_0,x_1])$，若对于任何满足 $\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$ 的 $\eta\in c^1([x_0,x_1])$，恒成立

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\eta(x)\mathrm{d}x=0$$

则在 $[x_0,x_1]$ 上恒有 $f(x)\equiv 0$。

证明：用反证法。假设 $f(x)\not\equiv 0$，不妨设在某 $\xi\in[x_0,x]$ 处，$f(\xi)>0$，因为 $f\in c([x_0,x_1])$，故存在 ξ 的一邻域 $[\xi_0,\xi_1]$，使在其上 $f(x)\geqslant c>0$，c 为某一确定的正数。其次，在 $[x_0,x_1]$ 上构造一符合引理条件的函数

$$\eta(x)=\begin{cases}0, 当\ x_0\leqslant x\leqslant\xi_0\\(x-\xi_0)^2(x-\xi_1)^2, \xi_0<x<\xi_1\\0, \xi_1\leqslant x\leqslant x_1\end{cases}$$

对于这个 $\eta(x)$，有

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\eta(x)\mathrm{d}x=\int_{\xi_0}^{\xi_1} f(x)(x-\xi_0)^2(x-\xi_1)^2\mathrm{d}x$$

$$\geqslant c\int_{\xi_0}^{\xi_1}(x-\xi_0)^2(x-\xi_1)^2\mathrm{d}x > 0$$

与假设 $\int_{\xi_0}^{\xi_1}f(x)\eta(x)\mathrm{d}x = 0$ 相矛盾，矛盾的结果表明在$[x_0,x_1]$上只能有 $f(x)\equiv 0$。

这个引理对多元函数也成立。即有

设 $f\in c^0(D)$，其中 D 是平面有界区域且有边界 c，若对任何满足 $\eta(x,y)|_c = 0$ 的 $\eta \in c^k(D)$ ，恒成立有

$$\iint_D f(x,y)\eta(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

则在 D 上恒有 $f(x,y)\equiv 0$

证明与一元函数时的情况类似。这时，取

$$\eta(x,y) = \begin{cases} [(x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2 - \delta^2]^{2n}, \\ \qquad (x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2 \leqslant \delta^2 \\ 0, \qquad\qquad \text{其它} \end{cases}$$

其中$(\bar{x},\bar{y})$使 $\eta(\bar{x},\bar{y}) \neq 0$ ，δ 是充分小的正数，$2n>k$。

现在来讨论泛函

$$J[y] = \int_a^b f(x,y,y')\mathrm{d}x \qquad (8.2.1)$$

取极值的必要条件。

设 $f \in c^2$，$\eta(x)$ 为符合基引理条件的任一函数，$y(x)\in c^2$ 是泛函式(8.2.1)的极值曲线，对于任给的 $\varepsilon>0$，取 α 充分小，使得

$$y(x) + \alpha\eta(x) \in U_\varepsilon^{(1)}[y(x)]$$

将 $y(x)+\alpha\eta(x)$代入泛函式得

$$J[y] = \int_a^b f[x,y(x) + \alpha\eta(x),y'(x) + \alpha\eta'(x)]\mathrm{d}x$$

由于 $y(x)$假设为已知，$\eta(x)$ 是任意取定的，所以 $J[y]$实际上变为参数 α 的一元函数

$$J[\alpha] = \int_a^b f[x, y(x) + \alpha\eta(x), y'(x) + \alpha\eta'(x)]\mathrm{d}x$$

显然，当 $\alpha = 0$ 时，$J[\alpha]$取得极值，故有

$$J'[\alpha]|_{\alpha=0} = 0 \text{ 或 } J'[0] = 0$$

利用含参变量积分的求导法则可得

$$J'[0] = \int_a^b [f'_y(x, y, y')\eta(x) + f_{y'}(x, y, y')\eta'(x)]\mathrm{d}x$$

对等式右端第二项积分进行分部积分。得

$$J'[0] = \int_a^b f_y \cdot \eta(x)\mathrm{d}x + f_{y'}\eta(x)|_a^b - \int_a^b \eta(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{y'}\mathrm{d}x$$

$$= f_{y'}\eta(x)|_a^b + \int_a^b [f_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{y'}]\eta(x)\mathrm{d}x$$

利用条件 $\eta(a) = \eta(b) = 0$，由 $J'(0) = 0$，上式变为

$$\int_a^b [f_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{y'}]\eta(x)\mathrm{d}x = 0$$

由基本引理有

$$f_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{y'} = 0 \qquad (8.2.2)$$

或

$$f_y - f_{y'x} - y'f_{y'y} - y''f_{y'y'} = 0 \qquad (8.2.3)$$

式(8.2.2)通常称为泛函式(8.2.1)的欧拉(Euler)方程。由此可见，若泛函式(8.2.1)有极值，则其极值曲线可以从它的欧拉方程的积分曲线族中去求。

对于依赖于多元函数的泛函，例如在二重积分泛函

$$J[u(x, y)] = \iint_D f(x, y, u, u_x, u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (8.2.4)$$

中，给定了边界条件

$$u(x, y)|_\Gamma = \varphi$$

其中 Γ 是区域 D 的边界曲线，φ 为已知，也有类似使泛函达成极

值的函数 $u(x,y)$ 必须满足的欧拉方程

$$f_u-\frac{\partial}{\partial x}f_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}f_{u_y}=0$$

这个方程,常称为**奥斯特洛格拉德斯基方程**,(简称为奥氏方程)。

因此,对三重积分泛函

$$J[u(x,y,z)]=\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z,u_x,u_y,u_z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其奥氏方程是

$$f_u-\frac{\partial}{\partial x}f_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}f_{u_y}-\frac{\partial}{\partial z}f_{u_z}=0$$

例 3 求 $J[u(x,y)]=\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-4u\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的奥氏方程

解:因为 $f(x,y,u,u_x,u_y)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-4u$,故

$$f_u-\frac{\partial}{\partial x}f_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}f_{u_y}=0,$$

$$-4-2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

所以奥氏方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2$$

例 4 求 $J[u]=\iiint\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+2uf(x,y,z)\right]\mathrm{d}V$ 的奥氏方程。

解:因为

$$f(x,y,z,u,u_x,u_y,u_z)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+2uf$$

故有

$$2f-2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

即奥氏方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f(x,y,z)$$

综上所述可见，求解变分极值问题都是通过求解微分方程边值问题而得到的。反之，能否将微分方程的边值问题在适当的条件下，利用变分方法来解决呢？

3. 变分原理(狄利克莱定理)

定理 拉普拉斯方程第三边值问题

$$\begin{cases}\Delta u\equiv\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad (x,y)\in D & (8.2.5)\\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right)\Big|_{\Gamma}=v & (8.2.6)\end{cases}$$

的二次连续可微解 $u^*(x,y)$ 一定使泛函

$$J[u(x,y)]=\frac{1}{2}\iint_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\Gamma}\left(\frac{1}{2}\sigma u^2-vu\right)\mathrm{d}s \qquad (8.2.7)$$

其中 Γ 为 D 的边界，s 为 Γ 上的弧长参数，$\sigma\geqslant 0$，且至少在一部分边界上 $\sigma>0$。取到最小值；反之，使泛函式(8.2.7)取到最小值的二次连续可微函数 $u=u^*(x,y)$ 一定是拉普拉斯方程第三边值问题式(8.2.5)、式(8.2.6)的解。

对于非齐次拉普拉斯方程的第三边值问题

$$\begin{cases}\Delta u=F & (8.2.8)\\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right)\Big|_{\Gamma}=v & (8.2.9)\end{cases}$$

若取泛函为

$$J[u]=\frac{1}{2}\iint_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2Fu\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\Gamma}\left(\frac{1}{2}\sigma u^2-vu\right)\mathrm{d}s$$

也成立与上述类似的变分原理。

如果式(8.2.9)中 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma}=0, v=0$，可取泛函

$$J[u]=\iint_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2Fu\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

当式(8.2.9)中 $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma=0$ 且 $F=0$ 时，可取泛函

$$J[u]=\frac{1}{2}\iint_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

定理的证明可参阅文献[1]，此处从略。

4. 里兹法

里兹法是变分问题直接解法中最重要的一种。它的基本思想是：不把泛函 $J[y]$ 的极值放在变分问题里的任意极端曲线上考虑，而是放在具有常系数的各种可能的线性组合，

$$y=\sum_{k=1}^{n}c_k u_k(x)$$

上来考虑，其中函数系 $\{u_1(x),u_2(x),\cdots,u_k(x),\cdots\}$ 具有相对完备性。即具有性质

(1) 每一个 $u_k(x)$ 在 $J[y]$ 的积分域 D 内有定义

(2) 任意有限多个函数都是线性无关的

(3) 对 $J[y]$ 定义域函数类 $\{y(x)\}$ 中的任一 $y(x)$，连同它的某阶导数，对任意的 $\varepsilon>0$，恒可找到某个线性组合

$$y_k=c_1u_1(x)+c_2u_2(x)+\cdots+c_ku_k(x)$$

在定义域内成立

$$|y-y_k|=|y-\sum_{i=1}^{k}c_iu_i(x)|<\varepsilon$$

$$|y'(x)-\sum_{j=1}^{k}c_iu'_i(x)|<\varepsilon,\cdots,$$

$$\left|y^{(n)}(x)-\sum_{j=1}^{k}c_iu_i^{(n)}(x)\right|<\varepsilon$$

在这样的线性组合式上，泛函 $J[y]$ 转变成系数 $c_1,c_2,\cdots,c_k$ 的函数 $J[c_1,c_2,\cdots,c_k]$。选取 $c_i(i=1,2,3,\cdots,k)$ 使 $J[c_1,c_2,\cdots,c_k]$ 达

到极值。故 $c_i(i=1,2,3,\cdots,k)$应由方程组

$$\frac{\partial J}{\partial c_i}=0 \quad (i=1,2,3,\cdots,k)$$

来确定。

令 $k\to\infty$，当极限 $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{k}c_iu_i(x)$ 存在时，我们就得到函数 $y(x)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}c_iu_i(x)$。

应当指出，由里兹法得到一列函数 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_k(x)$，$\cdots$。其中 $y_k(x)=\sum\limits_{i=1}^{k}c_iu_i(x)$，这一列函数，形成一个所谓极小化序列。对于这一序列，泛函值

$$J[y_1],J[y_2],\cdots,J[y_k],\cdots$$

收敛于泛函 $J[y]$的极小值或其下确界，但由

$$\lim_{k\to\infty}J[y_k(x)]=\min J[y(x)]$$

并不能推出 $\lim\limits_{k\to\infty}y_k(x)=y(x)$。

在实际计算中，即使收敛性未得到理论上的证实，但只要连续二次或三次所得到的结果极其接近，便认为所得的 $y_k(x)$是待求函数 $y(x)$较好的近似表达式。

现在我们用一个简单的变分问题

$$\begin{cases}J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x\\ y(x_0)=0 \quad y(x_1)=0\end{cases} \tag{8.2.10}$$

来简述里兹法的解题步骤。在此，边界条件是两端固定的特殊情况，但并不失一般性，因为当边界条件是非齐次的，即 $y(x_0)=y_0$，$y(x_1)=y_1$ 而二者不同时为零时，作函数代换

$$z=y(x)-\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1-\frac{x_1-x}{x_1-x_0}y_0 \tag{8.2.11}$$

就有 $z(x_0)=z(x_1)=0$。

解题步骤是

1） 取定一相对完备的函数列

$$u_1(x), u_2(x), \cdots, u_k(x), \cdots$$

并使其中每一个都满足边界条件式(8.2.11)。该函数序列的选取对于下一步计算的复杂程度有很大的影响。通常取

$$\{1, x, x^2, \cdots, x^k, \cdots\}$$

或 $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots\} \quad x \in [-\pi, \pi]$

若已知可取函数① 在 $x=0, x=1$ 处均等于零，则可选取

$$\{x(1-x), x^2(1-x), \cdots, x^k(1-x), \cdots\}$$

对于变分问题式(8.2.10)、式(8.2.11)，可取为

$$u_k(x) = (x - x_0)(x_1 - x)^k \text{ 或 } u_k(x) = \sin \frac{k\pi(x - x_0)}{x_1 - x_0}$$

2)将线性组合

$$y_k(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \cdots + c_k u_k(x) \quad (8.2.12)$$

视作式(8.2.10)的近似解，显然，无论常数 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 取何值，函数 $y_k(x)$ 总满足边界条件式(8.2.11)，将式(8.2.12)代入式(8.2.10)得含 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 的函数

$$J[c_1, c_2, \cdots, c_k] = \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, \sum_{i=1}^{k} c_i u_i(x), \sum_{i=1}^{k} c_i u'(x)\right) \mathrm{d}x \quad (8.2.13)$$

3） 求函数(8.2.13)的极值。由方程组

$$\frac{\partial J}{\partial c_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, k)$$

解得 $c_1, c_2, \cdots, c_k$。代入式(8.2.12)，即函数序列 $\{y_k(x)\}$。可以证明

$$\lim_{k \to \infty} J[y_k(x)] = \min J[y(x)]$$

在实际应用中，往往取 $y_k(x)$ 的前若干项作为问题式(8.2.10)，式

---

① 所有符合泛函 $J[y]$ 极值条件的可供选择的函数，叫做可取函数类或容许函数类。

(8.2.11)的近似解。

例 5 用里兹法求变分问题

$$\begin{cases} J[y]=\int_0^1 (y'^2-y^2+4xy)\mathrm{d}x \\ y(0)=0 \quad y(1)=0 \end{cases}$$

的近似解。

解:选取相对完备函数序列

$$u_k(x)=(1-x)x^k \quad (k=1,2,3,\cdots)$$

显然,其中每个函数都满足所给的边界条件。

作线性组合 $y_k(x)=\sum_{i=1}^{k}c_iu_i(x)$ 。先取 $y_1=c_1x(1-x)$代入泛函 $J[y]$得

$J[y]=J[c_1]=\int_0^1[c_1^2(1-2x)^2-c_1^2x^2(1-x^2)+4c_1x^2(1-x)]\mathrm{d}x$

令 $\dfrac{\mathrm{d}J[c_1]}{\mathrm{d}c_1}=0$ 得

$$\int_0^1\{2c_1(1-2x)^2-2[c_1x(1-x)-2x]x(1-x)\}\mathrm{d}x=0$$

由此有

$$\frac{3}{5}c_1=-\frac{1}{3} \quad 解得 \quad c_1=-\frac{5}{9}$$

得一次近似解

$$y_1(x)=-\frac{5}{9}x(1-x)$$

再取 $y_2(x)=c_1x(1-x)+c_2x^2(1-x)$

由类似上述运算过程可得

$$y_2(x)=-2x(1-x)\left(\frac{71}{369}+\frac{7}{41}x\right)$$

我们来看看近似解 $y_1(x)$、$y_2(x)$的近似程度,对于该变分问题,其欧拉方程是

$$y''+y-2x=0$$

容易验证，它的精确解是

$$y(x) = 2x - \frac{2\sin x}{\sin 1}$$

在 $x=\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5}$四点处，比较值如表 8-2 所示。

表 8-2

x	y	y_1	y_2
0.2	−0.0722	−0.0888	−0.0724
0.4	−0.1256	−0.1333	−0.1251
0.6	−0.1420	−0.1333	−0.1415
0.8	−0.1050	−0.0888	−0.1053

由表 8-2 可见，$y_1(x)$相当粗糙，但 $y_2(x)$的误差就已经很小了。

例 6 用里兹法求定解问题

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 \\ u|_\Gamma = 0 \end{cases}$$

的近似解。其中 Γ 表示区域 $D(-a\leqslant x\leqslant a,-b\leqslant y\leqslant b)$的边界。

解：由变分原理，泊松方程第一边值问题等价于泛函极值问题

$$\begin{cases} J[u(x,y)] = \displaystyle\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 4u\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y & (8.2.14) \\ u(x,y)|_\Gamma = 0 & (8.2.15) \end{cases}$$

由于方程本身及边界条件关于 x 轴和 y 轴是对称的，因此，解对于 x 轴和 y 轴也应是对称的，且只会出现偶次方，故相对完备函数系可取作

$$\varphi_1 = (a^2 - x^2)(b^2 - y^2), \varphi_2 = \varphi_1 x^2, \varphi_3 = \varphi_1 y^2, \cdots$$

从而一次近似解形式为

$$u_1(x,y) = c_1(a^2 - x^2)(b^2 - y^2) \tag{8.2.16}$$

将(8.2.16)代入式(8.2.14)得

$$J[c_1] = \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} 4\{c_1^2[x^2(b^2 - y^2)^2 + y^2(a^2 - x^2)^2]$$

$$- c_1(a^2 - x^2)(b^2 - y^2)\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

积分后令 $\dfrac{\partial J}{\partial c_1} = 0$，求得 $c_1 = \dfrac{5}{4(a^2 + b^2)}$，因此得

$$u_1(x,y) = \frac{5}{4}\frac{(a^2 - x^2)(b^2 - y^2)}{a^2 + b^2}$$

作二次近似，令

$$u_2(x,y) = (a^2 - x^2)(b^2 - y^2)(c_1 + c_2x^2 + c_3y^2)$$

类似地，将 $u_2(x,y)$ 代入式(8.2.14)后，令

$$\frac{\partial J[c_1,c_2,c_3]}{\partial c_i} = 0 \quad (i = 1,2,3)$$

解联立方程组得

$$c_1 = \frac{35(9a^4 + 130a^2b^2 + 9b^4)}{16(45a^6 + 509a^4b^2 + 509a^2b^4 + 45b^6)}$$

$$c_2 = \frac{105(9a^2 + b^2)}{16(45a^6 + 509a^4b^2 + 509a^2b^4 + 45b^6)}$$

$$c_3 = \frac{105(a^2 + 9b^2)}{16(45a^6 + 509a^4b^2 + 509a^2b^4 + 45b^6)}$$

把它们代入 $u_2(x,y)$ 中即得第二次近似解。

例 7 用里兹法求下列边值问题

$$\begin{cases}\Delta u + \lambda u = 0 \\ u|_{\rho=a} = 0\end{cases}$$

的固有值和各向对称的固有函数，其中 $\rho=a$ 是圆形区域的边界。

解：容易验证，泛定方程是泛函

$$J[u(x,y)] = \iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \lambda u^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

极值问题的奥氏方程。

由于区域 D 是以原点为中心，a 为半径的圆，相对完备函数系可取为

$$\varphi_k(\rho) = (a^2 - \rho^2)^k \quad (k = 1,2,3,\cdots)$$

又由解为各向对称的，故它只含有 ρ 的偶次方，于是近似函数为

$$u(\rho) = c_1(a^2 - \rho^2) + c_2(a^2 - \rho^2)^2$$

将它代入泛函 $J[u]$ 得

$$J[c_1, c_2] = \int_0^a\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 - \lambda u^2\right]\rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi$$

$$= 2\pi\int_0^a\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 - \lambda u^2\right]\rho \mathrm{d}\rho$$

$$= \pi\left[c_1^2\left(2a^4 - \frac{1}{3}a^6\lambda\right) + c_1c_2\left(\frac{8}{3}a^6 - \frac{1}{2}a^8\lambda\right)\right.$$

$$\left. + c_2^2\left(\frac{4}{3}a^8 - \frac{1}{5}a^{10}\lambda\right)\right]$$

令

$$\begin{cases} \dfrac{\partial J}{\partial c_1} = \left(4 - \dfrac{2}{3}a^2\lambda\right)c_1 + \left(\dfrac{8}{3}a^2 - \dfrac{1}{2}a^4\lambda\right)c_2 = 0 \\ \dfrac{\partial J}{\partial c_2} = \left(\dfrac{8}{3} - \dfrac{1}{2}a^2\lambda\right)c_1 + \left(\dfrac{8}{3}a^2 - \dfrac{2}{5}a^4\lambda\right)c_2 = 0 \end{cases}$$

解齐次方程组，取较小的一个 λ，有

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{0.638}{a^2}$$

从而得近似的固有值与固有函数为

$$\lambda = 5.7841$$

$$u = \frac{a^2(a^2 - \rho^2) + 0.638(a^2 - \rho^2)^2}{1.638}$$

精确值与近似值的比较如表 8-3 所示。

表 8-3

$\frac{\rho}{a}$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$\frac{\text{近似固有函数}}{a^4}$	0.945	0.789	0.550	0.270	0
$\frac{\text{精确固有函数}}{a^4}$	0.943	0.783	0.545	0.270	0

5. 伽辽金法

伽辽金法是里兹法的推广，它直接从微分方程出发，求得近似解式中若干系数。这样可绕过找不到适合的泛函的困难。所以，它较里兹法扩大了应用范围。现以求边值问题 $\left[L\text{ 表示微分算子}:L\equiv\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[a(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]+c(x)\right]$

$$\begin{cases}Ly\equiv\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[a(x)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+c(x)y=f(x)\\ y(0)=0\quad y(l)=0\end{cases}$$

的近似解为例，介绍用伽辽金法求解微分方程边值问题的步骤。

1)选取一个相对完备的函数系

$$u_1(x),u_2(x),\cdots,u_k(x),\cdots$$

这些函数都能满足所给边界条件。

2)取线性组合

$$y_k(x)=c_1u_1(x)+c_2u_2(x)+\cdots+c_ku_k(x)$$

作为微分方程的近似解，其中 $c_i(i=1,2,3,\cdots,k)$ 待定。显然，它满足边界条件。如果所设函数恰好是边值问题的解，则应有

$$Ly_k=f$$

但一般不会如此巧合，为使上式两端在整个区域 D 内尽可能一致，需适当选择线性组合中的系数 $c_i(i=1,2,3,\cdots,k)$。

3)按伽辽金的办法是用 $u_1(x),u_2(x),\cdots,u_k(x)$ 分别乘 $Ly_k=f$ 的两边，再令积分

$$\int_D(Ly_k-f)u_i(x)\mathrm{d}x=0\qquad i=1,2,3,\cdots,k$$

即
$$\int_D\left[L\left(\sum_{i=1}^{k}c_iu_i\right)-f\right]u_i\mathrm{d}x=0\quad i=1,2,3,\cdots,k$$

4)由积分后得到的含 $c_i(i=1,2,\cdots,k)$ 的 k 个方程组中解出 c_i，代入 2)中的 y_k 即得所求的近似解。

5)将 k 改为 $k+1$，重复以上步骤。若连续两次(或三次)所得

结果相差不大，即得近似解。

例 8 求解微分方程边值问题

$$\begin{cases} y'' - y' + 1 = 0 \\ y'(0) = 0 \quad y(1) = 0 \end{cases}$$

解：令 $\Phi = y'' - y' + 1$，则因

$$\Phi_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi_{y'} = -1 \neq 0$$

所以不存在形如

$$\int_0^1 F(x,y,y')\mathrm{d}x$$

的泛函，使 $y''-y'+1=0$ 成为它的欧拉方程。所以需用伽辽金法求近似解。

1)取满足边界条件的相对完备函数系

$u_1(x) = 1 - x^2, u_2(x) = (1 - x)x^2, \cdots, u_k(x) = (1 - x)x^k, \cdots$

2)设一次近似解为

$$y_1(x) = c_1(1 - x^2)$$

3)代入积分式

$$\int_0^1 (y'' - y' + 1)(1 - x^2)\mathrm{d}x = 0$$

得

$$c_1\int_0^1 (2x - 2)(1 - x^2)\mathrm{d}x + \int_0^1 (1 - x^2)\mathrm{d}x = 0$$

4)积分后得 $-\frac{5}{6}c_1+\frac{2}{3}=0$，故 $c_1=0.8$，于是一级近似解 $y_1=0.8(1-x^2)$。

若令 $y_2=c_1(1-x^2)+c_2(1-x)x^2$

则 $y'_2=-2c_1x+c_2x(2-3x) \quad y''_2=-2c_1+2c_2(1-3x)$

代入积分式

$$\int_0^1 (y''_2 - y'_2 + 1)(1 - x^2)\mathrm{d}x = 0,$$

及 $$\int_0^1 (y''_2 - y'_2 + 1)(x^2 - x^3)\mathrm{d}x = 0$$

积分后得

$$\begin{cases} 2.5c_1 + 0.8c_2 = 2 \\ 0.8c_1 + 1.6c_2 = 1 \end{cases}$$

解得

$$c_1 = \frac{120}{168} \quad c_2 = \frac{45}{168}$$

故

$$y_2(x) = \frac{120}{168}(1 - x^2) + \frac{45}{168}(x^2 - x^3)$$

微分方程的精确解是 $y=-e^x+x+(e-1)$，现将 $x=0,0.2,0.4,0.6,0.8,1.0$ 处的精确解值，近似解值比较如表 8-4 所示。

表 8-4

x	y	y_1	y_2	y'	y'_1	y'_2
0.0	0.7183	0.80	0.7143	0	0	0
0.2	0.6969	0.77	0.6943	−0.2214	−0.32	−0.2107
0.4	0.6265	0.67	0.6257	−0.4918	−0.64	−0.4857
0.6	0.4962	0.51	0.4957	−0.8221	−0.96	−0.8250
0.8	0.2972	0.29	0.2914	−1.2255	−1.28	−1.2286
1.0	0	0	0	−1.7183	−1.60	−1.6964

可见，y_2 很接近于精确解，y'_2 也与 y' 相差不大。

例 9 用伽辽金法求边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 = 0 \\ u|_{x=\pm a} = 0, \quad u|_{y=\pm a} = 0 \end{cases}$$

的近似解。

解：取 $u_1(x,y)=c_1(x^2-a^2)(y^2-a^2)$

算出 Δu_1+2 后，再乘 u_1 取积分，令积分为零。即

$$\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}(\Delta u_1 + 2)(x^2 - a^2)(y^2 - a^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

化简后得 $-\frac{256}{45}c_1a^8 + \frac{32}{9}a^6 = 0$，故 $c_1 = \frac{5}{8a^2}$，于是

$$u_1(x,y) = \frac{5}{8a^2}(x^2 - a^2)(y^2 - a^2)$$

最后，我们指出里兹法和伽辽金法的一些局限性：首先，对于边界形状比较复杂(如多边形)的区域，想找合适的满足边界条件的相对完备函数系是很困难的。即使勉强凑成，也需用到相当高次的多项式，或某些函数的特殊结构，需较多的技巧性。其次，被积函数一般都是高次的，计算量大，若积分区域稍许复杂一点，即使像三角形那样，也难于计算。

目前日益广泛应用的有限元法，是里兹法、伽辽金法的继续，它克服了因区域复杂而带来的困难。

§8.3 有限元法

有限元素法是一种求偏微分方程数值解的计算方法。依据变分原理，它将变分问题作适当地离散化，然后求出数值解。本节，我们以平面稳定温度场为例，介绍用有限元素法求偏微分方程数值解的基本思想及具体做法。

内部无热源，具有热交换条件的平面稳定温度分布问题，其温度函数 $u(x,y)$ 是如下拉普拉斯方程第三边值问题的解

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (x,y) \in D \\ \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\Big|_{\Gamma} = v \end{cases}$$

其中 Γ 为区域 D 的边界，$\sigma \geqslant 0$ 且至少在一部分边界上 $\sigma > 0$。

1. 区域网格的剖分

将求解区域 $D+\Gamma$ 剖分为有限个互不重迭的三角形单元，每个三角形单元的三个顶点均取为节点，这种剖分要遍及整个区域直至边界。当边界为曲线时，可在每一小段上近似地用相应的直线代替，并取为三角形单元的一边，如图 8-16。

和差分法一样，我们也着眼于求节点上温度函数的近似值。而与差分法不同的是，此时不必采用直交网格，故节点的配置方式是相当任意的。

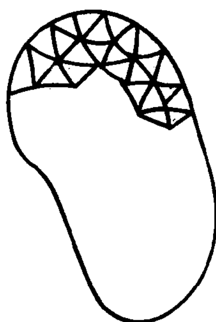


图 8-16

将所有的节点及三角形单元分别按一定的顺序从 1 开始编号，每个节点 l 的坐标 $x(l)$ 及 $y(l)$ 以及构成三角形单元 e 的三个节点的编号：$i(e)$，$j(e)$ 与 $m(e)$（按逆时针顺序排列）都是计算所需的信息。

为了统一计算格式，在剖分单元时规定，每个边界单元只有一条边落在边界曲线 Γ 上，该边相对的顶点在信息输入时放在单元三节点中的第一个位置，即取为 $i(e)$。

2. 列出计算格式

由变分原理知，与所给定解问题相应的泛函是

$$J[u]=\frac{1}{2}\iint\limits_{D}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{2}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\Gamma}\left(\frac{1}{2}\sigma u^{2}-\upsilon u\right)\mathrm{d}s \tag{8.3.1}$$

其中 $u(x,y)$ 及其一阶偏导在 $D+\Gamma$ 上连续，在 D 内具有二阶连续偏导，s 为 Γ 上的弧长参数，如图 8-17。对任一单元 e，设三节点 i，j，m（按逆时针顺序排列）上的温度值为 u_i，u_j，u_m，其坐标分别为 (x_i,y_i)，(x_j,y_j)，(x_m,y_m)，因为要计算相应的泛函式(8.3.1)的数值，就要在 e 上积分，故需要构造单元 e 上的温度插值函数，即利

用节点上的函数值来设法补充构造单元内部的函数值，利用线性插值，设在单元 e 上 u 是 x,y 的线性函数

$$u = a_1 + a_2 x + a_3 y$$

待定常数 a_1, a_2 及 a_3 可由节点上的函数值确定，实际上，三角形单元 e 的面积

$$\Delta_e = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}$$

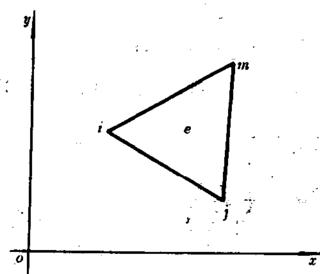


图 8-17

由

$$\begin{cases} u_i = a_1 + a_2 x_i + a_3 y_i \\ u_j = a_1 + a_2 x_j + a_3 y_j \\ u_m = a_1 + a_2 x_m + a_3 y_m \end{cases}$$

可解得

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{2\Delta_e}(a_i u_i + a_j u_j + a_m u_m) \\ a_2 = \dfrac{1}{2\Delta_e}(b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m) \\ a_3 = \dfrac{1}{2\Delta_e}(c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m) \end{cases}$$

其中

$$\begin{cases} a_i = x_j y_m - x_m y_j \\ b_i = y_j - y_m \\ c_i = x_m - x_j \end{cases} \quad \begin{cases} a_j = x_m y_i - x_i y_m \\ b_j = y_m - y_i \\ c_j = x_i - x_m \end{cases} \quad \begin{cases} a_m = x_i y_j - x_j y_i \\ b_m = y_i - y_j \\ c_m = x_j - x_i \end{cases}$$

这样，我们就得到单元 e 上的温度插值函数

$$u = \frac{1}{2\Delta e}[(a_i + b_i x + c_i y)u_i + (a_j + b_j x + c_j y)u_j + (a_m + b_m x + c_m y)u_m] \tag{8.3.2}$$

因为采用的是线性插值，在任意两相邻单元的公共边上，这样构造的插值函数保持连续，称之为满足**相容性条件**。

对于上述用线性插值方法构造出来的插值函数 u，其值在边 $\overline{jm}$ 上，也是在 u_j 与 u_m 间线性变化的。如果以 t 表示 $\overline{jm}$ 边上的变动参数，$t=0$ 时对应于 j 点，$t=1$ 时对应于 m 点，则在 $\overline{jm}$ 边上，此插值函数可表为

$$(1-t)u_j + tu_m \quad (0 \leqslant t \leqslant 1) \tag{8.3.3}$$

记 $\overline{jm}$ 的边长为

$$s_i = \sqrt{(x_j - x_m)^2 + (y_j - y_m)^2} \tag{8.3.4}$$

易知 $t = \dfrac{s}{s_i}$，其中 s 是 $J\overline{m}$ 边上从 j 点算起的弧长参数

由式(8.3.2)可得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{2\Delta_e}(b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{2\Delta_e}(c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m) \end{cases} \tag{8.3.5}$$

于是，由式(8.3.3)～(8.3.6)可知，泛函在单元 e 上的值为

$$\begin{aligned} J_e &= \frac{1}{2}\iint_e \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\Gamma\cap e} \left(\frac{1}{2}\sigma u^2 - \upsilon u\right) \mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2}\iint_e \frac{1}{4\Delta^2 e}[(b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m)^2 + (c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m)^2] \\ &\mathrm{d}x\mathrm{d}y + s_i \int_0^1 \left[\frac{1}{2}\sigma_i((1-t)u_j + tu_m)^2 - \upsilon_i((1-t)u_j + tu_m)\right] \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{8\Delta_e}[(b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m)^2 + (c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m)^2] \\ &\quad + s_i \int_0^1 \left[\frac{1}{2}\sigma_i((1-t)u_j + tu_m)^2 - \upsilon_i((1-t)u_j + tu_m)\right] \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{8.3.7}$$

其中 $\Gamma \cap e$ 表示 Γ 与 e 的公共部分，σ_i 及 υ_i 是边界单元的一边（在边界 Γ 上）的平均值。若 e 是内部单元，则第二项积分不出现，或认为 $\sigma_i = \upsilon_i = 0$，从式(8.3.7)可见，$J_e$ 是单元节点温度的二次函数。

将式(8.3.7)表示的每个单元 e 上的泛函值迭加起来，就得到整个区域 $D + \Gamma$ 上的泛函之值，它自然也是节点温度的二次函

数，可写为

$$J = \sum_{e=1}^{e_0} J_e = \frac{1}{2}\sum_{l,h=1}^{l_0} \sigma_{lh} u_l u_h - \sum_{l=1}^{l_0} \xi_l u_l \qquad (8.3.8)$$

其中 e_0 是单元的总数，l_0 是节点的总数，式(8.3.8)中的二次项 $\frac{1}{2}\sum_{l,h=1}^{l_0} \sigma_{lh} u_l u_h$ 是由积分

$$\sum_{e=1}^{e_0}\left\{\frac{1}{2}\iint_e \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\int_{\Gamma\cap e} \sigma u^2 \mathrm{d}s\right.$$

$$= \frac{1}{2}\iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\int_\Gamma \sigma u^2 \mathrm{d}s$$

所决定，由于至少在一部分区域边界上 $\sigma > 0$，因此，积分在 $u \neq 0$ 时恒大于零。故二次型

$$\sum_{l,h=1}^{l_0} \sigma_{l,h} u_l u_h$$

是正定的，其系数矩阵 $\sigma = (\sigma_{lh})$ 是对称正定阵，称为**刚度阵**。

由变分原理，泛函 $J[u]$ 应达到最小值，所以，节点上的温度值 $u_l(l=1,2,\cdots,l_0)$ 应满足条件

$$\frac{\partial J[u]}{\partial u_l} = \sum_{l=1}^{l_0} \frac{\partial J_e}{\partial u_l} = 0 \quad (l = 1,2,\cdots,l_0) \qquad (8.3.9)$$

由于只有对以 l 为节点的单元 e，J_e 的表达式中才含有 u_l，因此，和式(8.3.9)实际上只要对一切以 l 为结点的单元 e 求和即可。

由式(8.3.8)知，式(8.3.9)可写为

$$\sum_{h=1}^{l_0} \sigma_{lh} u_h = P_l \quad (l = 1,2,\cdots,l_0) \qquad (8.3.10)$$

这是一个以节点温度 $u_l(l=1,2,\cdots,l_0)$ 为未知数的线性代数方程组，显然，线性方程组(8.3.10)有唯一解。

用有限元法列计算格式实际上就是

(1)要形成刚度矩阵 σ:(σ_{lh})

(2)要形成右端的向量 $P = (P_l)$

习 题 八

1. 用差分方法计算热传导方程下列混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0 \quad (0 < t \leqslant 1) \\ u|_{t=0} = x(1-x) \end{cases}$$

的近似解(取 $\Delta x = 0.2, \Delta t = 0.02$)

2. 设区域 D 是边平行于坐标轴，长度为 1，中心在原点的正方形，用差分法(取步长 $h = 0.1$)求拉普拉斯方程狄利克莱内问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u|_{x=\pm\frac{1}{2}} = -1, \ u|_{y=\pm\frac{1}{2}} = 1 \end{cases}$$

的解的第一次近似值 $U_{ij}^{(1)}$(取零次近似值 $U_{ij}^{(0)} = 0$)

3. 已知实心柱形杆扭转问题的应力函数 $\Phi(x,y)$ 是如下泊松方程狄利克莱内问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -2G\theta \\ \Phi|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

的解，其中 G、θ 为常数，试列出其相应的差分方程

4. 列出下列波动方程混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u|_{t=0} = x(1-x) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

的差分格式

5. 用里兹法解常微分方程边值问题

$$\begin{cases} y'' + xy' + y = 2x \\ y(0) = 1 \quad y(1) = 0 \end{cases}$$

6. 用里兹法求下列问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-1 \quad -a\leqslant x\leqslant a \quad -a\leqslant y\leqslant a\\ u|_{\Gamma=0}\end{cases}$$

其中Γ为区域D的边界。

7. 用伽辽金法求

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\dfrac{\partial u}{\partial x}=x\\ u|_{\Gamma}=0\end{cases}$$

的近似解。其中Γ表示区域D:[$0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$]的边界。

8. 对调和方程第一边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\\ u|_{\Gamma}=\mu\end{cases}$$

怎样用有限元法来形成其计算格式?

9. 证明:对任何单连通区域D上的有限元素剖分,若内节点个数为α,边界节点个数为β,则三角形元素的总数为

$$e_0=2\alpha+\beta-2$$

第九章　定解问题的适定性

我们已经知道，物理学，力学和工程技术等方面的许多问题都归结为偏微分方程的定解问题，因此，数学物理方程最终目的就是要研究这些问题的解法。所以探讨问题的求解方法，是研究数学物理方程的中心问题。

但是，数学物理方程这一学科的任务并不局限于对具体的问题研究求解的方法，它还要对物理学、力学中所可能碰到的方程及其定解问题作系统的研究。这种研究既对求解问题有帮助，又有助于把实际问题正确地归结为偏微分方程的定解问题。研究一个定解问题，我们自然要问：这个定解问题的解是否一定存在？这便是解的存在性问题。诚然，物理或力学系统的运动规律是客观存在，对于合理地提出的问题，解的存在性似乎是不成问题的，因为自然现象本身就给出了问题的解答。其实未必尽然，因为我们从物理、力学或工程技术系统归结出偏微分方程时，总要经过一些近似的过程，并提出一些附加的要求。对于复杂的系统，我们有时也很难断定提出问题时所给的条件是否有互相矛盾的地方，所以，只有弄清了解的存在性之后，才能使我们确信所归结出的定解问题的条件的合理性。另外，对存在性的研究也往往同时是一个提供求解方法的过程。其次，我们还要问，这个定解问题的解是否只有一个？这便是唯一性问题。同存在性的考虑一样，研究清楚了唯一性之后，我们就可以断言，对于解决所归结出的定解问题，给出的条件已经足够了。反之，如果给出的条件不足以保证解的唯一性，就表示解决问题的条件还不完备，还需要去寻找新的条件。最后一个问题是解的稳定性问题，也就是当定解条件或自由项有微小变化时，在某种距离意义下所求出的解是否也只有微小的变化？解的稳定性问

题的产生是很自然的，因为我们研究物理现象时需要进行测量，测量免不了会有误差。如定解条件的细小误差会导致解的重大变化，那么这个定解问题的归结也是缺乏基础的。反之，若定解问题的解是稳定的，我们就可以断言，当定解条件在一定意义下有少许误差，我们所得到的解还是近似于所要求的解。

定解问题的存在性、唯一性和稳定性，称为定解问题的适定性，基于以上的理由，可见适定性的研究是很重要的，一个定解问题的提出是否合理，要有适定性作为它的基础，同时也应当指出，当我们用数学物理方程理论和求解方法来解决具体的物理，力学与工程技术问题时，没有必要坚持先解决适定性问题才能去求解。有时一个定解问题的解法虽然暂时缺少严格的理论基础，但由实践验证是能采用的，在这种解法中有时还会出现新的有效的普遍的方法和理论的萌芽。

本章以涉及数学理论不太多的定解问题为例，对三类方程的各种定解问题的适定性分别进行初步讨论。

§9.1　波动方程

1. 混合问题

在第三章中，对混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < l \quad t > 0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \quad 0 < x < l \\ u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0 \end{cases} \tag{9.1.1}$$

我们已经求得一个形式解

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi a}{l}t + b_k \sin\frac{k\pi a}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x \tag{9.1.2}$$

其中 a_k 和 b_k 是在区间$[0,l]$上下列两级数展开式的系数。

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi}{l} x$$

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi a}{l} \sin \frac{k\pi}{l} x$$

这种形式推导解的表达式的过程称为分析过程，要证明它满足方程与定解条件，还必须进行验证。

1） 解的存在性

现在证明，当定解问题(9.1.1)中的初始条件，$\varphi(x)$，$\psi(x)$满足一定的条件时，级数式(9.1.2)确是这个问题的解，这种验证过程称为综合过程。

首先，注意到

$$u_1(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi a}{l} t \sin \frac{k\pi}{l} x \tag{9.1.3}$$

是定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < l \quad t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) & 0 \leqslant x \leqslant l \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0 \end{cases} \tag{9.1.4}$$

的形式解，又

$$u_2(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi a}{l} t \sin \frac{k\pi}{l} x \tag{9.1.5}$$

是定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < l \quad t > 0 \\ u|_{t=0} = 0 & 0 \leqslant x \leqslant l \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0 \end{cases} \tag{9.1.6}$$

的形式解。

由定解问题(9.1.1)的线性性质，所以形式解式(9.1.2)可以看作是两个形式解式(9.1.4)与式(9.1.6)之和。

由富里埃级数理论知，当 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 在区间 $[0,l]$ 上连续，且满足相容条件(与齐次边界条件相容)$\varphi(0)=\varphi(l)=0$ 时，函数 $\varphi(x)$ 的富里埃正弦级数在区间 $[0,l]$ 上绝对且一致收敛。

利用积化和差公式

$$\sin\frac{k\pi}{l}x\cos\frac{k\pi a}{l}t=\frac{1}{2}\sin\frac{k\pi}{l}(x-at)+\frac{1}{2}\sin\frac{k\pi}{l}(x+at)$$

将 $u_1(x,t)$ 表成

$$u_1(x,t)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}a_k\left(\sin\frac{k\pi}{l}(x-at)+\sin\frac{k\pi}{l}(x+at)\right)$$

设 $F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin\frac{k\pi}{l}x$ 是 $\varphi(x)$ 的以 $2l$ 为周期的奇延拓，即

$$F(x)=\begin{cases}\varphi(x) & 0\leqslant x\leqslant l\\ -\varphi(x) & -l\leqslant x<0\end{cases}$$

$$F(x+2l)=F(x)$$

则 u_1 又可改写成

$$u_1(x,t)=\frac{1}{2}[F(x-at)+F(x+at)] \qquad (9.1.7)$$

于是有

$$u_1(0,t)=\frac{1}{2}[F(-at)+F(at)]$$

$$=\frac{1}{2}[-F(at)+F(at)]=0$$

$$u_1(l,t)=\frac{1}{2}[F(l-at)+F(l+at)]$$

$$=\frac{1}{2}[-F(l+at)+F(l+at)]=0$$

也就是说，$u_1(x,t)$ 满足边界条件。又

$$u_1(x,0)=\frac{1}{2}[F(x)+F(x)]=F(x)=\varphi(x)\quad 0\leqslant x\leqslant l$$

而 $\varphi'(x)$在$[0,l]$上是连续的，故 $F'(x)$对所有的 x 存在且连续，将 u_1 对 t 微分得

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}=\frac{1}{2}[-aF'(x-at)+aF'(x+at)]$$

从而有

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial t}\right|_{t=0}=\frac{1}{2}[-aF'(x)+aF'(x)]=0$$

所以初始条件亦满足。

为了证明 $u_1(x,t)$满足定解问题(9.1.1)中的泛定方程，需要对它求二次微分，对 $\varphi(x)$还要加限制：设 $\varphi''(x)$在$[0,l]$上连续且满足相容性条件 $\varphi''(0)=\varphi''(l)=0$，则 $F''(x)$处处存在并连续，因此

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}=\frac{1}{2}a^2[F''(x-at)+F''(x+at)]$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=\frac{1}{2}[F''(x-at)+F''(x+at)]$$

从而证得 $\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}$

为了证明 $u_2(x,t)$是定解问题(9.1.6)的解，设 $\psi(x)$及 $\psi'(x)$在$[0,l]$上连续，且满足相容性条件 $\psi(0)=\psi(l)=0$，则

$$\psi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\frac{k\pi a}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}$$

在区间$[0,l]$上绝对且一致收敛，记 $c_k=\frac{k\pi a}{l}b_k$，则有

$$u_2(x,t)=\frac{l}{\pi a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{k}\sin\frac{k\pi a}{l}t\sin\frac{k\pi}{l}x \tag{9.1.8}$$

我们即将看到，上式对 t 可以逐项微分，因为

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\cos\frac{k\pi a}{l}t\sin\frac{k\pi}{l}x \tag{9.1.9}$$

利用积分和差公式，可得

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} c_k\left[\sin\frac{k\pi}{l}(x - at) + \sin\frac{k\pi}{l}(x + at)\right] \tag{9.1.10}$$

由 $\psi(x)$的假设知，以上两个级数都是绝对且一致收敛的，所以逐项微分是容许的。

设 $G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\frac{k\pi}{l}x$ 是 $\psi(x)$的以 $2l$ 为周期的奇延拓，则式(9.1.10)可改写作

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{1}{2}[G(x - at) + G(x + at)]$$

将上式积分得

$$u_2(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t [G(x - at_1) + G(x + at_1)]\mathrm{d}t_1$$

$$= \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} G(\tau)\mathrm{d}\tau$$

由此得

$$u_2(x,0) = 0$$

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{1}{2}[G(x) + G(x)] = G(x) = \psi(x)$$

而

$$u_2(x,t)|_{x=0} = \frac{1}{2}\int_0^t [G(-at_1) + G(at_1)]\mathrm{d}t_1$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t [-G(at_1) + G(at_1)]\mathrm{d}t_1 = 0$$

注意到周期性，同理可验证 $u_2(x,t)|_{x=l} = 0$

经证 $u_2(x,t)$满足定解问题(9.1.6)中的泛定方程。因为$\psi'(x)$在$[0,l]$上连续，所以 G'存在，且

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \frac{a}{2}[-G'(x - at)tG'(x + at)]$$

在式(9.1.8)中，将 $u_2(x,t)$对 x 微分得

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\frac{k\pi a}{l} t \cos\frac{k\pi}{l} x$$

$$= \frac{1}{2a}\sum_{k=1}^{\infty} c_k \left[-\sin\frac{k\pi}{l}(x-at) + \sin\frac{k\pi}{l}(x+at) \right]$$

$$= \frac{1}{2a}\left[-G(x-at) + G(x+at) \right]$$

再对 x 微分得

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \frac{1}{2a}\left[-G'(x-at) + G'(x+at) \right]$$

故有

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}$$

综上所述得混合问题(9.1.1)解的存在定理。

定理 1 在区间$[0,l]$上，若函数 $\varphi(x) \in c^2, \psi(x) \in c^1$，且

$$\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0$$

则一维波动方程的定解问题(9.1.1)的解是存在的，它可以用级数(9.1.2)给出，其中 a_k 及 b_k 由

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \sin\frac{k\pi}{l} x \mathrm{d}x, b_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l \psi(x) \sin\frac{k\pi}{l} x \mathrm{d}x$$

确定。

2) 解的唯一性

经证定解问题(9.1.1)解的唯一性

定理 2 （唯一性定理）定解问题(9.1.1)至多存在一个解，其中 $u(x,t)$是对 x 和 t 二次可微的函数。

证 设 u_1 和 u_2 都是定解问(9.1.1)的解。令 $v = u_1 - u_2$，易知 v 是定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} & 0 < x < l \quad t > 0 \\ v|_{x=0} = v|_{x=l} = 0 & t > 0 \\ v|_{t=0} = \dfrac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0 & 0 \leqslant x \leqslant l \end{cases}$$

的解，我们现在来证明函数 $v(x,t)$ 恒等于零。为此，考察函数

$$I(t)=\frac{1}{2}\int_0^l(a^2v_x^2+v_t^2)\mathrm{d}x$$

它在物理上表示在 t 时刻弦振动时的总能量。

按假设，函数 $v(x,t)$ 是二次连续可微的，将 $I(t)$ 对 t 微分得：

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\int_0^l(a^2v_xv_{x,t}+v_tv_{t,t})\mathrm{d}x \qquad (9.1.11)$$

由分部积分有

$$\int_0^l a^2v_xv_{x,t}\mathrm{d}x=a^2v_tv_x\Big|_0^l-\int_0^l a^2v_tv_{xx}\mathrm{d}x$$

由条件 $v(0,t)=0$，故有 $v_t(0,t)=0$。同理由条件 $v(l,t)=0$ 可得 $v_t(l,t)=0$，所以上式右端第一项等于零，式(9.1.11)变为

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\int_0^l v_t(v_{tt}-a^2v_{xx})\mathrm{d}x=0 \qquad (9.1.12)$$

故有 $\qquad I(t)=C$(常数)

又因 $v(x,0)=0$，所以有 $v_x(x,0)=0$。注意到条件 $v_t(x,0)=0$，可得

$$I(0)=C=\frac{1}{2}\int_0^l(a^2v_x^2+v_t^2)|_{t=0}\mathrm{d}x=0$$

于是 $I(t)\equiv0$。这只有对一切 $t>0$ 都有 $v_x=0$，$v_t=0$ 时才能成立，从而必有 $v(x,t)=C$。利用条件 $v(x,0)=0$ 而得 $v(x,t)=0$，所以 $u_1(x,t)\equiv u_2(x,t)$，即解是唯一的。

3)解的稳定性

关于定解问题(9.1.1)稳定性的证明，需用到“能量不等式”，此处从略。

至此，我们得到结论：混合问题(9.1.1)是适定的。

2. 初值问题

在第二章中，我们已经求得一维波动方程柯西问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & -\infty < x^2 + \infty \quad t > 0 \\
u\big|_{t=0} = \varphi(x) \\
\dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x) & -\infty < x < \infty
\end{cases}
\tag{9.1.13}
$$

的形式解为

$$
u(x,t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi
\tag{9.1.14}
$$

由于形式解是积分形式，不难验证，当 $\varphi(x) \in C^2, \psi(x) \in C^1$ 时，它的确给出初值问题的解。另外，如果上述初值问题有解，则解一定可以由初始条件用达朗贝尔公式表示出来。因此，解一定是唯一的。至此，一维波动方程初值问题解的存在性与唯一性得证。

现在来证明稳定性，这里所说的稳定性，是指对任意的 $\varepsilon > 0$ 和每一时间间隔 $0 < t < T$，存在正数 $\delta(\varepsilon, T)$，使得当

$$
|\varphi(x) - \varphi_1(x)| < \delta \quad |\psi(x) - \psi_1(x)| < \delta
$$

时，有

$$
|u(x,t) - u_1(x,t)| < \varepsilon
$$

其中 $u_1(x,t)$ 表示对应于初始条件 $\varphi_1(x), \psi_1(x)$ 的解。

由式(9.1.14)有

$$
\begin{aligned}
&|u(x,t) - u_1(x,t)| \\
&\quad \leqslant \frac{1}{2}|\varphi(x + at) - \varphi_1(x + at)| + \frac{1}{2}|\varphi(x - at) - \varphi_1(x - at)| + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}|\psi(\xi)| - \psi_1(\xi)|\mathrm{d}\varepsilon < \varepsilon
\end{aligned}
$$

其中 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{1 + T}$，稳定性得证。

由此得到波动方程的初值问题是适定的。

§9.2 热传导方程

1. 混合问题

1） 解的存在性

我们已知，热传导方程的混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0<x<l \quad t>0\\ u|_{x=0}=u|_{x=l}=0 \\ u|_{t=0}=\varphi(x)\end{cases} \tag{9.2.1}$$

的形式解是

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{k\pi}{l}x \tag{9.2.2}$$

现在我们来证明，若函数 $\varphi(x)$ 在区间 $[0,l]$ 上连续，且 $\varphi(0)=\varphi(l)=0$，$\varphi'(x)$ 在 $[0,l]$ 内分段连续，则形式解式(9.2.2)确实是定解问题(9.2.1)的解。

因为 $\varphi(x)$ 在区间 $[0,l]$ 上连续，故有

$$|C_k|=\frac{2}{l}\left|\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{k\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi\right|\leqslant\frac{2}{l}\int_0^l|\varphi(\xi)|\mathrm{d}\xi\leqslant K$$

其中 K 是正常数。对于任意给定的 $t>t_0>0$ 有

$$|C_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{k\pi}{l}x|\leqslant K e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \quad t\geqslant t_0 \text{ 时}$$

由比值判别法知，数项级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}K e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}$$

是收敛的。根据维尔斯特拉斯(Weierstreass)判别法知，级数(9.2.2)当 $t\geqslant t_0$，$0\leqslant x\leqslant l$ 时是一致收敛的。

把式(9.2.2)对 t 逐项微分得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\sum_{k=1}^{\infty}C_k\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{k\pi}{l}x \tag{9.2.3}$$

当 $t\geqslant t_0$ 时，注意到

$$\left|C_k\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{k\pi}{l}x\right| \leqslant K\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t_0}$$

而级数 $\sum_{k=1}^{\infty}K\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t_0}$ 收敛，故级数(9.2.3)在区域 $0\leqslant x\leqslant l, t\geqslant t_0$ 上是一致收敛的。同样，把级数(9.2.2)对 x 逐项微分两次，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sum_{k=1}^{\infty}C_k\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{k\pi}{l}x \qquad (9.2.4)$$

由式(9.2.3)、式(9.2.4)即得 $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，故级数(9.2.2)在区域 $0\leqslant x\leqslant l, t\geqslant 0$ 内是一维热传导方程的解。

经证 $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}C_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{k\pi}{l}x$ 满足边界条件。由于级数(9.2.2)在区域 $0\leqslant x\leqslant l, t>0$ 内是一致收敛的，而通项为连续函数的一致收敛级数的和函数是连续的，故 $u(x,t)$ 在 $x=0, x=l$ 处连续，于是对所有的 $t>0$

$$u(x,t)|_{x=0} = 0 \quad u(x,t)|_{x=l} = 0$$

最后，证明 $u(x,t)$ 满足初始条件

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x) \quad 0\leqslant x\leqslant l$$

在前面的假设下

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}C_k\sin\frac{k\pi}{l}x$$

绝对且一致收敛，而序列 $\left\{e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}\right\}$ 是单调且一致有界的。根据阿贝尔(Abel)判别法，级数

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}C_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{k\pi}{l}x$$

在区域 $0\leqslant x\leqslant l, t\geqslant 0$ 上一致收敛。因而 $u(x,t)$ 在区域 $0\leqslant x\leqslant l, t\geqslant 0$ 上连续，于是初始条件

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x) \quad 0\leqslant x\leqslant l$$

被满足，至此得下述定理。

定理 1 如果 $\varphi(x)$ 在区间 $[0,l]$ 上连续，$\varphi(0)=\varphi(l)=0$，且 $\varphi'(x)$ 在 $(0,l)$ 内分段连续，则混合问题(9.2.1)的解存在，并可用式(9.2.2)表出。

2) 解的唯一性与稳定性

(1) **极值原理** 极值原理是描述扩散、传导等现象的热传导方程的重要特性的，其物理意义以热传导为例，可解释为：如果物体内部没有热源，而物体的边界温度及初始温度分布都不超过某值 M，则物体内部就不可能产生高于 M 的温度，我们以方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{9.2.5}$$

证明下面的

定理 2 (极值原理) 设 $u(x,t)$ 是在矩形域 $R:\{\alpha\leqslant x\leqslant\beta,0\leqslant t\leqslant T\}$ 上连续，在 R 内满足方程(9.2.5)，则有

$$\max_R|u(x,t)|=\max_\Gamma|u(x,t)|$$

其中 Γ 表示 R 两侧边 $x=\alpha,x=\beta,(0\leqslant t\leqslant T)$ 与底边 $(t=0,\alpha\leqslant x\leqslant\beta)$ 所组成的边界。

证：因为将 u 变号，最小值的情形就变为最大值的情形，所以，仅考虑最大值的情形。

用反证法 设 M 为函数 $u(x,t)$ 在 R 上的最大值，m 为 $u(x,t)$ 在边界 Γ 上的最大值。如果定理不真，则 $M>m$，因此在 R 内定有一点 $(x^*,t^*)(t^*>0,\alpha<x^*<\beta)$ 使，$u(x^*,t^*)=M$。作函数

$$v(x,t)=u(x,t)+\frac{M-m}{4l^2}(x-x^*)^2$$

其中 $l=\beta-\alpha$。由于在 Γ 上

$$v(x,t)<m+\frac{M-m}{4}=\frac{1}{4}(M+3m)=\theta M\quad(0<\theta<1)$$

在 (x^*,t^*) 处有

$$v(x^*,t^*)=M$$

即 $v(x,t)$ 和 $u(x,t)$ 一样，不在 Γ 上取得最大值。设 $v(x,t)$ 在 R 内

某点(x_1,t_1)上取得最大值($t_1>0$ $\alpha<x_1<\beta$)，则在该点处应有

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}<0,\frac{\partial v}{\partial t}\geqslant 0\quad\left(若\ t_1<T_1\ \frac{\partial u}{\partial t}=0;若\ t_1=T,\frac{\partial v}{\partial t}\geqslant 0\right)$$

因此在点(x_1,t_1)处

$$\frac{\partial v}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\geqslant 0$$

另一方面，通过直接计算得

$$\frac{\partial v}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-a^2\frac{M-m}{2l}$$

$$=-a^2\frac{M-m}{2l^2}<0$$

矛盾的结果说明我们原先的假设是不正确的，定理证毕。

(2)混合问题解的唯一性与稳定性，利用极值原理立即可得

定理 3 热传导方程的混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f\\ u|_{t=0}=\varphi(x)\\ u|_{x=\alpha}=\mu_1(t)\quad u|_{x=\beta}=\mu_2(t)\end{cases}\tag{9.2.6}$$

在区域 R 内的解是唯一的，而且它连续地依赖于边界 Γ 上所有给定的初始条件及边界条件。

证 设 u_1 和 u_2 是混合问题(9.2.6)的两个解，$v=u_1-u_2$ 在 R 内满足式(9.2.5)，而在 Γ 上取零值，由极值原理得在 R 内 $v\equiv 0$，即 $u_1\equiv u_2$，唯一性得证。

得证稳定性，设混合问题的两个解 u_1 和 u_2 在 Γ 上满足

$$|u_1-u_2|<\varepsilon$$

则由极值原理得到在 R 内也成立着

$$|u_1-u_2|<\varepsilon$$

解的稳定性得证。

例 1 用极值原理证明：若方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + cu \quad (c > 0)$$

的解的绝对值在 $R: 0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t \leqslant T$ 的边界 $x=0$ 及 $x=l$ 上不超过 B,在边界 $t=0$ 上不超过 M,则解在域 R 内满足不等式

$$|u(x,t)| \leqslant \max(Be^{ct}, Me^{ct})$$

其中 B、M 是大于零的常数,并证明上述混合问题解的唯一性。

证:令 $u(x,t)=e^{ct}v(x,t)$,则原方程可简化为

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

在 R 的边界上有

$$\max_{\substack{x=0\\x=l}} |v(x,t)| = \max_{\substack{x=0\\x=l}} |e^{-ct}u(x,t)| \leqslant \max_{\substack{x=0\\x=l}} |u(x,t)| \leqslant B$$

$$\max_{t=0} |v(x,t)| = \max_{t=0} |e^{-ct}u(x,t)| = \max_{t=0} |u(x,t)| \leqslant M$$

根据热传导方程的极值原理,在 R 内有

$$|v(x,t)| \leqslant \max(B,M)$$

从而有

$$|u(x,t)| = |e^{ct}v(x,t)| \leqslant \max(Be^{ct}, Me^{ct})$$

经证唯一性,设 u_1、u_2 是定解问题的两个解,则 $v=u_1-u_2$ 满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + cv \\ v|_{t=0} = 0 \\ v|_{x=0} = v|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

根据上述估计有

$$|v(x,t)| \leqslant \max(0 \cdot e^{ct}, 0 \cdot e^{ct}) = 0$$

所以 $v(x,t) \equiv 0$,即 $u_1 \equiv u_2$,唯一性得证

2. 初值问题

为简便起见,仅对一维齐次方程的情形进行讨论。

热传导方程初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & -\infty<x<\infty \quad t>0 \\ u\big|_{t=0}=\varphi(x) & -\infty<x<+\infty\end{cases} \tag{9.2.7}$$

的形式解是

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi \quad t>0 \tag{9.2.8}$$

我们即将验证，当 $\varphi(x)$ 满足一定条件时，式(9.2.8)的确是式(9.2.7)的解。

(1)解的存在性。设 $\varphi(x)$ 连续且有界，则式(9.2.8)表示的 $u(x,t)$ 满足式(9.2.7)中的泛定方程及初始条件。实际上，因为 $|\varphi(x)|\leqslant M$，由式(9.2.8)有

$$|u(x,t)|\leqslant M\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi$$

$$=M\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\xi^2}\mathrm{d}\xi=M \quad \left(令\ \xi=\frac{\xi-x}{2a\sqrt{t}}\right)$$

即泊松积分(9.2.8)是收敛的，由它所表达的函数 $u(x,t)$ 是有界的。

现在证明由式(9.2.8)表示的函数 $u(x,t)$ 满足泛定方程，不难验证，积分号下的函数

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$$

对变量 t,x 而言(视 ξ 为参数)，当 $t>0$ 时，泛定方程中出现的导数可在式(9.2.8)积分号下进行，存在性即得证。为了保证积分号下求导的可能性，需证明在积分号下求导后所得的积分是一致收敛的。现以对 x 的一阶偏导为例来验证。

将被积函数对 x 求一阶偏导后所成的积分写为

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-(x-\xi)\varphi(\xi)}{2a^2t^{3/2}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi$$

它在 $t \geqslant t_0 > 0$（t_0 为任意正数）范围内总是一致收敛的，所以，当 $t > 0$ 时有

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-(x-\xi)\varphi(\xi)}{2a^2 t^{3/2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \mathrm{d}\xi$$

同理可证式(9.2.8)积分的其它偏导数亦能在积分号下求导，从而知由式(9.2.8)表示的函数 $u(x,t)$ 当 $t>0$ 时满足泛定方程。

最后验证由式(8.2.9)确定的函数满足初始条件。即要证明对任何 x_0，当 $t\to 0, x\to x_0$ 时，$u(x,t)\to\varphi(x_0)$，也就是对任意给定的 $\varepsilon > 0$，一定可以找到 $\delta>0$，使得当 $|x-x_0|<\delta, t<\delta$ 时，不等式

$$|u(x,t)| - \varphi(x_0)| < \varepsilon$$

成立。为此，在式(9.2.8)中令 $\zeta = \dfrac{\xi - x}{2a\sqrt{t}}$ 得

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x + 2a\sqrt{t}\,\zeta)\mathrm{e}^{-\zeta^2}\mathrm{d}\zeta$$

又

$$\varphi(x_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_0)\mathrm{e}^{-\zeta^2}\mathrm{d}\zeta$$

$$\begin{aligned}
|u(x,t) - \varphi(x_0)| &= \left| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(x + 2a\sqrt{t}\,\zeta) - \varphi(x_0)]\mathrm{e}^{-\zeta^2}\mathrm{d}\zeta \right| \\
&\leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-N}^{N} |\varphi(x + 2a\sqrt{t}\,\zeta) - \varphi(x_0)|\mathrm{e}^{-\zeta^2}\mathrm{d}\zeta \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-N} |\varphi(x + 2a\sqrt{t}\,\zeta) - \varphi(x_0)|\mathrm{e}^{-\zeta^2}\mathrm{d}\zeta \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{N}^{+\infty} |\varphi(x + 2a\sqrt{t}\,\zeta) - \varphi(x_0)|\mathrm{e}^{-\zeta^2}\mathrm{d}\zeta \qquad (9.2.9)
\end{aligned}$$

对于给定的 $\varepsilon>0$，取 N 足够大，使

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{N}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\zeta^2}\mathrm{d}\zeta < \frac{\varepsilon}{6M}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{-N} e^{-\zeta^2} d\zeta < \frac{\varepsilon}{6M}$$

固定 N，由 $\varphi(x)$ 的连续有界性，可找到 $\delta > 0$，当 $|x - x_0| < \delta, t < \delta$ 时，

$$|\varphi(x + 2a\sqrt{t}\zeta) - \varphi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (N < \zeta < N)$$

成立，这时，式(9.2.9)变为

$$|u(x,t) - \varphi(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-N}^{N} e^{-\zeta^2} d\zeta + \frac{2M}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{-N} e^{-\zeta^2} d\zeta$$

$$+ \frac{2M}{\sqrt{\pi}}\int_{N}^{+\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + 4M \cdot \frac{\varepsilon}{6M} = \varepsilon$$

于是得到下面的定理。

定理 4 设 $\varphi(x)$ 为有界连续函数，初值问题(9.2.7)存在有界解，且其解由式(9.2.8)表出。

对初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \quad -\infty < x < \infty \end{cases} \tag{9.2.10}$$

可类似地作出证明。

(2)解的唯一性与稳定性。

考察初值问题(9.2.10)，讨论无界直线上的问题，相当于要求温度的变化是有界的，即要求存在某常数 M，使对任何 $t \geqslant 0, -\infty < x < +\infty$，均有 $|u(x,t)| < M$。下面我们就在有界函数类中讨论初值问题(9.2.10)解的唯一性与稳定性。

定理 5 初值问题(9.2.10)在有界函数类中的解是唯一的，而且连续依赖于所给的初始条件。

证： 唯一性。设 u_1, u_2 为式(9.2.10)的两个有界解，则 $v = u_1 - u_2$ 满足定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ v|_{t=0} = 0\end{cases} \tag{9.2.11}$$

如果我们能证明在整个区域：$t \geqslant 0, -\infty < x < +\infty$ 中，$v(x,t) \equiv 0$，则唯一性得证。

因为 v 有界，即 $|v| < 2M$，但由于区域无界，$v(x,t)$ 可能在任何地方都达不到它的最大、最小值，从而不能直接应用极值原理。

为了能够应用极值原理，对上半平面的任一点 (x_0,t_0)，$t_0>0$。先考虑矩形区域 R_0：

$$0 \leqslant t \leqslant t_0, \quad |x - x_0| \leqslant l$$

其中 l 是任意的正数，作满足式(9.2.11)的辅助函数

$$w(x,t) = \frac{4M}{l^2}\left[\frac{(x-x_0)^2}{2} + a^2 t\right]$$

它在区域 R_0 上是连续的，且

$$w(x,0) = \frac{2M(x-x_0)^2}{l^2} \geqslant 0 = v(x,0)$$

$$w(x_0 \pm l, t) \geqslant 2M \geqslant v(x_0 \pm l, t)$$

所以，在 R_0 的下底及侧边上有

$$w(x,t) \geqslant v(x,t)$$

由极值原理知，在 R_0 上也成立不等式

$$w(x,t) \geqslant v(x,t)$$

即

$$\frac{4M}{l^2}\left[\frac{(x-x_0)^2}{2} + a^2 t\right] \geqslant v(x,t)$$

类似地可以证明在 R_0 上成立着

$$v(x,t) \geqslant \frac{4M}{l^2}\left[\frac{(x-x_0)^2}{2} + a^2 t\right]$$

特别地，在 (x_0,t_0) 点处有

$$|v(x_0,t_0)| \leqslant \frac{4M}{l^2} a^2 t_0$$

令 $l \to \infty$ 即得 $v(x_0,t_0)=0$，由于(x_0,t_0)是上半平面内的任意一点，故在整个区域中 $v(x,t)\equiv 0$，解的唯一性得证。

为证初值问题的有界解对初始条件的连续依赖性，只需证明当 $|\varphi(x)|<\eta$ 时，在整个区域：$t\geqslant 0$，$-\infty<x<+\infty$ 中，$w(x,t)<\eta$。这时取

$$w(x,t)=\frac{4M}{l^2}\left[\frac{(x-x_0)^2}{2}+a^2t\right]+\eta$$

代替原来的辅助函数，和唯一性完全类似地可以证明稳定性也成立。

§9.3 拉普拉斯方程

如果一个函数和它的一阶、二阶导数都在区域 D 内连续，而且它在区域 D 内满足拉普拉斯方程，则该函数就称为在区域 D 内的**调和函数**。调和函数的一个重要性质就是成立着**极值原理**，即它不能在区域内部取到极值。极值原理的物理意义为：既无热源又无热汇的物体的温度，在它的表面上取得最大(最小)值；也可以解为：不含有任何自由电荷的区域上的静电势也在区域的边界上取得最大值(或最小值)。

现在，我们用另一种方法来证明最大值和最小值原理。

定理 1(最大值原理)　假设函数 $u(x,y)$在有界区域 D 内是调和的，在闭区域 $\overline{D}=D+\Gamma$ 上连续，则 $u(x,y)$在 D 的边界上取得其最大值。

证： 用反证法，设 $u(x,y)$在 $\overline{D}=D+\Gamma$ 上的最大值不在 Γ 的任何点取得，那么 $u(x,y)$必在 D 内的某点 $P_0(x_0,y_0)$上取得最大值 $M_0=u(x_0,y_0)$。记 M 为 $u(x,y)$在边界 Γ 上的最大值，作函数

$$w(x,y)=u(x,y)+\frac{M_0-M}{2R^2}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2] \tag{9.3.1}$$

其中点 $P(x,y)$ 在 D 上，而 R 是包含 D 的圆的半径。因为

$$w(x_0,y_0) = u(x_0,y_0) = M_0$$

而在 Γ 上有

$$w(x,y) \leqslant M + \frac{M_0 - M}{2} = \frac{1}{2}(M + M_0) < M_0$$

所以 $v(x,y)$ 同 $u(x,y)$ 一样，必在 D 内某点 (x_1,y_1) 上取得最大值，由 $v(x,y)$ 的定义，在这点上可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{(M_0 - M)}{2R^2} \\ &= \frac{(M_0 - M)}{2R^2} > 0 \qquad (9.3.2)\end{aligned}$$

由于 $w(x,y)$ 在点 (x_1,y_1) 处取得最大值，那么在该点上应有

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \leqslant 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \leqslant 0$$

因此在这点处可得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \leqslant 0$$

与式(9.3.2)矛盾。矛盾的结果说明原假设错误，故 $u(x,y)$ 的最大值必在 Γ 上取得。证毕。

定理 2(最小值原理)　如果函数 $u(x,y)$ 在有界区域 D 内调和，在 $\overline{D}=D+\Gamma$ 上连续，则 $u(x,y)$ 在 Γ 上取得其最小值。

证： 将定理 1 应用到 $-u(x,y)$ 即得证明。

推论 1　设 $u(x,y)=C$(常数)，上述两定理成立。因为：$u(x,y)=C$ 为调和函数，它在 D 内与 Γ 上取得相同的值。

推论 2　设 $u(x,y)$ 及 $v(x,y)$ 都是区域 D 内的调和函数，且在 $\overline{D}=D+\Gamma$ 上连续。如果在 Γ 上成立着不等式 $u\leqslant v$，则在 D 内上述不等式也成立，并且只有在 $u\equiv v$ 时，在 D 内才会有等号成立的可能。

证： 设 $w=u-v$，则 w 为满足极值原理的调和函数，且 $w|_\Gamma \leqslant 0$。于是在 D 内有

$$w \leqslant \max_{(x,y)\in\Gamma} w(x,y) \leqslant 0$$

即在 D 内有 $u\leqslant v$。若在 Γ 上有 $u=v$，即 $w\doteq 0$，则由极值原理在 D 内有

$$0 = \min_{(x,y)\in\Gamma} w(x,y) \leqslant w \leqslant \max_{(x,y)\in\Gamma} w(x,y) = 0$$

即 $w=0$，从而 $u=v$。反之，若在 D 内 $u=v$，即 $w=0$，由连续性，则在 Γ 上有 $w=0$，即 $u=v$。

现在我们利用极值原理证明拉普拉斯方程第一边值问题解的唯一性及稳定性。

定理 3(唯一性定理) 如果狄利克莱问题

$$\begin{cases}\Delta u = 0 \\ u|_\Gamma = f\end{cases}$$

在 D 内的解存在，则必是唯一的。

证： 设 $u_1(x,y)$ 和 $u_2(x,y)$ 是狄氏问题的两个解，即

$$\begin{cases}\Delta u_1 = 0 \\ u_1|_\Gamma = f\end{cases} \qquad \begin{cases}\Delta u_2 = 0 \\ u_2|_\Gamma = f\end{cases}$$

所以，$v=u_1-u_2$ 是第一边值问题

$$\begin{cases}\Delta v = 0 \\ v|_\Gamma = 0\end{cases}$$

的解。由于 $v|_\Gamma = (u_1 - u_2)|_\Gamma \equiv 0$，即在 Γ 上

$$u_1 \equiv u_2$$

根据极值原理，在 D 的所有内点上有

$$u_1 \equiv u_2$$

因此，解是唯一的。

定理 4(稳定性定理) 狄利克莱内问题的解连续依赖于边界条件。

证： 设 u_1 和 u_2 分别是第一边值问题

$$\begin{cases}\Delta u_1 = 0 \\ u_1|_\Gamma = f_1\end{cases} \qquad \begin{cases}\Delta u_2 = 0 \\ u_2|_\Gamma = f_2\end{cases}$$

的解，其中 f_1 和 f_2 相差甚小，即对于预先给定的 $\varepsilon>0$，有

$$\max_{\Gamma}|f_1 - f_2| < \varepsilon$$

如果我们证得 $|u_1-u_2|<\varepsilon$，则定理证毕。令 $v=u_1-u_2$，则 v 是第一边值问题

$$\begin{cases}\Delta v = 0 \\ v|_{\Gamma} = f_1 - f_2\end{cases}$$

的解，根据最大最小值定理有

$$|v| \leqslant \max|v| = \max_{\Gamma}|f_1 - f_2| < \varepsilon$$

即
$$|u_1 - u_2| \leqslant \max_{\Gamma}|f_1 - f_2| < \varepsilon$$

定理 5 狄利克莱外问题

$$\begin{cases}\Delta u = 0 & (x,y,z) \in \Omega' \\ u|_{\Gamma} = f \\ \lim\limits_{\rho\to\infty} u = 0\end{cases}$$

的解如果存在，则必是唯一的。

证： 设 u_1,u_2 是狄氏外问题的解，令 $v = u_1 - u_2$，则调和函数 v 满足

$$\begin{cases}\Delta v = 0 \\ v|_{\Gamma} = 0 \\ \lim\limits_{\rho\to\infty} v = 0\end{cases}$$

如果 v 不恒等于零，则必存在某点 $M\in D$，使得 $v(M)\neq 0$，不妨设 $v(M)>0$，以 Γ_R 表示半径为 R 的球面，取 R 足够大，使 M 点落在由 Γ 及 Γ_R 所围成的区域 Ω_R 中，由于

$$\lim_{\rho\to\infty} u = 0$$

可得在 Γ_R 上有 $v|_{\Gamma_R}<v(M)$，由此得到调和函数 v 在 Ω_R 的边界 Γ 及 Γ_R 上都取不到最大值，与最大最小值定理矛盾。所以只能

$$v \equiv 0, \quad u_1 = u_2$$

类似地可以证明狄利克莱外问题解的稳定性。

对于第二内边值问题，可以证明，除相差一常数外，解是唯一

的。

第二内边值问题是

$$\begin{cases}\Delta u = 0, & \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = f\end{cases}$$

其中 u 在 $\overline{\Omega}=\Omega+\Gamma$ 上一阶偏导数连续。

设 u_1, u_2 是上述边值问题的两个解，则 $v=u_1-u_2$ 是下列第二边值问题

$$\begin{cases}\Delta v = 0, & \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0\end{cases} \tag{9.3.3}$$

的解，其中 v 在 $\overline{\Omega}=\Omega+\Gamma$ 上一阶偏导数连续，在第一格林公式

$$\iiint_{\Omega} u\Delta w \mathrm{d}\Omega = \iint_{\Gamma} u \frac{\partial w}{\partial n}\mathrm{d}s - \iiint_{\Omega} \mathrm{grad}u \cdot \mathrm{grad}w \mathrm{d}\Omega$$

中的 u 和 w 都取作 $v=u_1-u_2$，则得

$$0 = \iint_{\Gamma} v \frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}s - \iiint_{\Omega} (\mathrm{grad}v)^2 \mathrm{d}\Omega$$

由式(9.3.3)中的边界条件即得

$$\iiint_{\Omega} (\mathrm{grad}v)^2 \mathrm{d}\Omega = 0$$

所以，在 Ω 内必有 $\mathrm{grad}v=0$，即

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

因此 $\qquad v \equiv C, \quad u_1-u_2=C$

由此得到

定理6 牛曼内问题的解除去一个常数外是唯一的。

最后，讨论解的存在性问题。

1) 圆域的狄利克莱内问题

我们知道，半径为 a 的圆域狄氏内问题

$$\begin{cases}\Delta u = 0 \\ u(\rho,\theta)|_{\rho=a} = f(\theta)\end{cases} \tag{9.3.4}$$

的形式解是

$$u(\rho,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^k(a_k\cos k\theta + b_k\sin k\theta) \tag{9.3.5}$$

我们即将证明，当 $f(\theta)$ 是连续函数时，式(9.3.5)表示的 $u(\rho,\theta)$ 的确是式(9.3.4)的解。

因为 $f(\theta)$ 是连续的，所以

$$a_k = \frac{1}{\pi a^k}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos k\theta \mathrm{d}\theta \quad (k = 0,1,2,\cdots)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin k\theta \mathrm{d}\theta \quad (k = 0,1,2,3,\cdots)$$

都是有界的，即存在常数 $M>0$，使得

$$|a_0| < M, |a_k| < M, |b_k| < M \quad (k = 1,2,3,\cdots)$$

考察函数列

$$u_k(\rho,\theta) = \left(\frac{\rho}{a}\right)^k(a_k\cos k\theta + b_k\sin k\theta) \tag{9.3.6}$$

有

$$|u_k| \leqslant 2\left(\frac{\rho_0}{a}\right)^k M, \quad a < \frac{\rho}{a} < \frac{\rho_0}{a} < 1$$

因此，在单位圆内的任何闭圆域内，级数(9.3.5)一致收敛。

其次，将 u_k 对 ρ 微分，因为当 $0 \leqslant \frac{\rho}{a} \leqslant \frac{\rho_0}{a} < 1$ 时，有

$$\left|\frac{\partial u_k}{\partial \rho}\right| = \left|\frac{k}{a}\left(\frac{\rho}{a}\right)^{k-1}(a_k\cos k\theta + b_k\sin k\theta)\right| < 2\frac{k}{a}\left(\frac{\rho_0}{a}\right)^{k-1}$$

所以把级数(9.3.5)对 ρ 逐项微分所得的级数在上述闭圆域内也是一致收敛的，同样可以证明将级数(9.3.5)对 ρ 和 θ 逐项微分两次所得到的级数，当 $0 \leqslant \frac{\rho}{a} \leqslant \frac{\rho_0}{a} < 1$ 时，也是一致收敛的，而级数(9.3.5)的每一项都是调和函数，且上述级数均一致收敛，所以

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^2}\left(\frac{\rho}{a}\right)^{k-2}(a_k\cos k\theta + b_k\sin k\theta)[k(k-1)+k-k^2] = 0$$

从而函数 $u(\rho,\theta)$在区域 $0 \leqslant \frac{\rho}{a} < 1$ 内的任一点上是调和的

经证 u 满足边界条件 $u|_\Gamma = f(\theta)$

将 a_k, b_k 代入式(9.3.5),因级数一致收敛,交换求和与积分的次序后得

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\mathrm{d}t$$

$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^k \int_0^{2\pi} f(\tau)[\cos k\tau\cos k\theta + \sin k\tau\sin k\theta]\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^k\cos(\theta-\tau)]f(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (9.3.7)$$

因为当$0<\rho<1$时,

$$1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{\rho}{a}\right)^k\cos k(\theta-\tau)\right]$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{\rho}{a}\right)^k e^{ik(\theta-\tau)} + \left(\frac{\rho}{a}\right)^k e^{-ik(\theta-\tau)}\right]$$

$$= 1 + \frac{\rho e^{i(\theta-\tau)}}{a-\rho e^{i(\theta-\tau)}} + \frac{\rho e^{-i(\theta-\tau)}}{a-\rho e^{i(\theta-\tau)}}$$

$$= \frac{a^2-\rho^2}{a^2 - a\rho e^{i(\theta-\tau)} - a\rho e^{-i(\theta-\tau)} + \rho^2}$$

所以

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^2-\rho^2}{a^2-2\rho a\cos(\theta-\tau)+\rho^2}f(\tau)\mathrm{d}\tau \quad (9.3.8)$$

由式(9.3.7),当 $f(\theta)\equiv 1$时得 $u(\rho,\theta)=1$,由式(9.3.8)得

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^2-\rho^2}{a^2-2a\rho\cos(\theta-\tau)+\rho^2}\mathrm{d}\tau$$

对于$0\leqslant\rho\leqslant 1$,可得

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a^2 - \rho^2}{a^2 - 2a\rho\cos(\theta - \tau) + \rho^2} f(\theta)\mathrm{d}\tau \quad (9.3.9)$$

由式(9.3.8)与式(9.3.9)得

$$u(\rho,\theta) - f(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(a^2 - \rho^2)[f(\tau) - f(\theta)]}{a^2 - 2a\rho\cos(\theta - \tau) + \rho^2}\mathrm{d}\tau \tag{9.3.10}$$

由于 $f(\theta)$在区间$[0,2\pi]$上是一致连续的，故对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正数 $\delta(\varepsilon)$，使得当 $|\theta-\tau|<\delta$ 时，有

$$|f(\theta) - f(\tau)| < \varepsilon$$

如果$|\theta-\tau|\geqslant\delta$，而 $\theta-\tau\neq 2k\pi(k=0,1,2,\cdots)$，则

$$\lim_{\rho\to a^-} \frac{a - \rho^2}{a^2 - 2a\rho\cos(\theta - \tau) + \rho^2} = 0$$

即是说，存在 ρ_0，使得对于$0\leqslant\rho\leqslant\rho_0<a$，当$|\theta-\tau|\geqslant\delta$ 时，有

$$\frac{a - \rho^2}{a^2 - 2a\rho\cos(\theta - \tau) + \rho^2} < \varepsilon$$

把式(9.3.10)右端积分区间分为$|\theta-\tau|\geqslant\delta$ 与$|\theta-\tau|<\delta$，则有

$$\begin{aligned}
&|u(\rho,\theta) - f(\theta)| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-\tau|>\delta}^{2\pi} \frac{a^2 - \rho^2}{a^2 - 2a\rho\cos(\theta - \tau) + \rho^2}|f(\theta) - f(\tau)|\mathrm{d}\tau \\
&+ \frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-\tau|<\delta}^{2\pi} \frac{a^2 - \rho^2}{a^2 - 2a\rho\cos(\theta - \tau) + \rho^2}|f(\theta) - f(\tau)|\mathrm{d}\tau \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\varepsilon(\max_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} 2|f(\theta)|) + \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\varepsilon \\
&= \varepsilon\cdot[1 + 2(\max_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}|f(\theta)|)]
\end{aligned}$$

即对 θ 一致成立。

$$\lim_{\rho\to a^-} u(\rho,\theta) = f(\theta)$$

因此，我们得到如下的定理。

定理7 存在且仅存在一个调和函数 $u(\rho,\theta)$取给定的连续边值 $f(\theta)$。这个函数的积分形式为

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a^2 - \rho^2}{\rho^2 - 2a\rho\cos(\theta - \tau) + a^2} f(\tau)|\mathrm{d}\tau$$

级数形式是

$$u(\rho,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^k(a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta)$$

2) 矩形域的狄利克莱内问题

矩形域的狄利克莱内问题是

$$\begin{cases}\Delta u=0 \quad 0<x<a \quad 0<y<b\\ u|_{x=0}=u|_{x=a}=0\\ u|_{y=0}=f(x) \quad u|_{y=b}=0\end{cases} \tag{9.3.11}$$

它的形式解是

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k^*\frac{\operatorname{sh}\frac{k\pi}{a}(b-y)}{\operatorname{sh}\frac{k\pi b}{a}}\sin\frac{k\pi}{a}x \tag{9.3.12}$$

其中 $$a_k^*=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{k\pi}{a}x\mathrm{d}x$$

现在我们来验证,当 $f(x)$在$[0,a]$上连续,$f'(x)$在$[0,a]$上分段连续且 $f(0)=f(a)=0$时,式(9.3.12)表示的函数 $u(x,y)$的确是定解问题(9.3.11)的解。

我们注意到

$$\frac{\operatorname{sh}\frac{k\pi}{a}(b-y)}{\operatorname{sh}\frac{k\pi b}{a}}=\mathrm{e}^{-\frac{k\pi y}{a}}\frac{1-\mathrm{e}^{-\frac{2k\pi(b-y)}{a}}}{1-\mathrm{e}^{-\frac{2k\pi b}{a}}}$$

$$\leqslant C^*\mathrm{e}^{-\frac{k\pi}{a}y}$$

其中 C^*是常数。因为 $f(x)$在$[0,a]$上连续,故是有界的。从而

$$|a^*|\leqslant\frac{2}{a}\int_0^a|f(x)|\mathrm{d}x=C_2$$

因此 $u(x,y)$的级数形式(9.3.12)可用级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}M\cdot\mathrm{e}^{-\frac{k\pi y_0}{a}} \quad (y\geqslant y_0>0 \quad M=\text{常数})$$

来控制,故当$0\leqslant x\leqslant a$,$y\geqslant y_0\geqslant 0$时,$u(x,y)$的级数式一致收敛,从

而和函数 $u(x,y)$ 在这个区域上连续，且有

$$u(0,y) = u(a,y) = u(x,b) = 0$$

即满足三个齐次边界条件。

将 $u(x,y)$ 对 x 微分两次即得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{k=1}^{\infty} - a_k^* \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 \frac{\operatorname{sh}\frac{k\pi}{a}(b-y)}{\operatorname{sh}\frac{k\pi b}{a}} \sin\frac{k\pi}{a}x$$

将 u 对 y 微分两次得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^* \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 \frac{\operatorname{sh}\frac{k\pi}{a}(b-y)}{\operatorname{sh}\frac{k\pi b}{a}} \sin\frac{k\pi}{a}x$$

显见，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 的级数都以

$$\sum_{k=1}^{\infty} M^* k^2 e^{-\frac{k\pi y_0}{a}} \quad (0 < y_0 < b \quad M^* = \text{常数})$$

为优级数，所以，对任意的 $0<y_0<b$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 的级数在区域 $0\leqslant x\leqslant a$，$y_0\leqslant y\leqslant b$ 上是一致收敛的，由此即得 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 存在，u 满足拉普拉斯方程。

最后验证 $u(x,0)=f(x)$，由 $f(x)$ 的所设条件知，$f(x)$ 的富里埃级数一致收敛。在 $u(x,y)$ 的级数中令 $y=0$ 得

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^* \sin\frac{k\pi}{a}x$$

因 $u(x,0)$ 一致收敛于 $f(x)$ 可表示为：对任意给定的 $\varepsilon>0$，总可找到正数 $N(\varepsilon)$，当 m、$n>N(\varepsilon)$ 时，恒有

$$|S_m(x,0) - S_n(x,0)| < \varepsilon$$

其中 $$S_m(x,y) = \sum_{k=1}^{m} a_k^* \frac{\operatorname{sh}\frac{k\pi}{a}(b-y)}{\operatorname{sh}\frac{k\pi}{a}b} \sin\frac{k\pi}{a}x$$

我们也知道 $S_m(x,y)-S_n(x,y)$ 满足拉普拉斯方程，且在 $x=0$，$x=a$ 和 $y=b$ 上满足边界条件。根据最大(小)值原理，在区域 $0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y\leqslant b$ 上，当 m、$n>N(\varepsilon)$ 时有

$$|S_m(x,y)-S_n(x,y)|<\varepsilon$$

于是 $u(x,y)$ 的级数式在该区域上一致收敛。所以和函数 $u(x,y)$ 在 $0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y\leqslant b$ 上连续，从而得到

$$u(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{*}\sin\frac{k\pi}{a}x=f(x)$$

至此，验证完毕。

习 题 九

1. 受摩擦力作用的两端固定的有界弦振动，满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-c\frac{\partial u}{\partial t}$$

证明其能量是减少的，并由此证明方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-c\frac{\partial u}{\partial t}+f$$

的混合问题解的唯一性及关于初始条件及自由项的稳定性。

2. 证明初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-c(x,t)u+f(x,t) & \begin{array}{l}-\infty<x<+\infty\\ t>0\end{array}\\ u|_{t=0}=\varphi(x) & -\infty<x<+\infty\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)\end{cases}$$

解的唯一性。

3. 证明半无界问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t) \quad 0<x<+\infty \quad t>0\\ u\Big|_{t=0}=\varphi(x) \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x) \quad 0<x<+\infty\\ u|_{x=0}=\mu(t) \quad t>0\end{cases}$$

的解的唯一性。

4. 证明初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a(x,t)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x}+c(x,t)u=f(x,t) \\ \qquad\qquad -\infty<x<+\infty \quad t>0 \\ u|_{t=0}=\varphi(x) \qquad -\infty<x<+\infty\end{cases}$$

的有界解是唯一的，其中 $a(x,t)\geqslant a_0>0, c(x,t)\geqslant 0, b(x,t), c(x,t)$ 有界。

5. 证明半无界问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t) \quad 0<x<+\infty \quad t>0 \\ u|_{t=0}=\varphi(x) \quad 0<x<+\infty \\ u|_{x=0}=\mu(t) \quad t>0\end{cases}$$

的有界解是唯一的。

6. 在 $0<x<l, t>0$ 区域内讨论定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-u=0 \\ u|_{x=0}=u|_{x=l}=0 \\ u|_{t=0}=f(x)\end{cases}$$

的解关于初始条件的稳定性，其中 $f(x)\in c^1$

7. 证明泊松方程狄利克莱内问题

$$\begin{cases}\Delta u=f \\ u|_{\Gamma}=g\end{cases}$$

解的唯一性。

8. 记 $R_2^+=\{(x,y)\mid -\infty<x<+\infty, y>0\}$，证明定解问题

$$\begin{cases}-\Delta u=f(x,y) \quad (x,y)\in R_2^+ \\ u|_{y=0}=\varphi(x) \quad -\infty<x<+\infty\end{cases}$$

属于 $c(\overline{R}_2^+)\cap c^2(\overline{R}_2^+)$ 的有界解是唯一的。

提示：考虑辅助函数 $w(x,y)=\varepsilon\ln[x^2+(y+1)^2]\pm u(x,y)$ 其中 ε 是任意正常数。

9. 设 D 为二维有界区域：$P_0(x_0,y_0)\in\partial D$ $u\in c(D\backslash P_0)\cap c^2(D)$ 是定解问题

$$\begin{cases}-\Delta u=f(x,y) \quad (x,y)\in D \\ u|_{\partial D\backslash P_0}=\varphi(x,y)\end{cases}$$

的有界解，证明这样的解是唯一的。

提示：考虑辅助函数 $W(x,y)=\epsilon\ln\frac{d}{\rho}\pm u(x,y)$，其中 d 是 D 直径，$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$。

附录 I　Γ函数的基本知识

我们将 Γ 函数的定义及基本性质作一简要的介绍

1. Γ函数与β函数

我们称以 p,q 为参量的广义积分

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$$

为第一类欧拉积分，这个积分当 $p>0,q>0$ 时是收敛的。由它所确定的函数，称为 p,q 的 **β函数**，记作

$$\beta(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x \tag{I.1}$$

在(I.1)中令 $x=\sin^2\theta$，则可将 $\beta(p,q)$ 写成另一种形式

$$\beta(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\mathrm{d}\theta \tag{I.2}$$

我们称以 p 为参量的广义积分

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{p-1}\mathrm{d}x$$

为第二类欧拉积分，这个积分当 $p>0$ 时收敛，由它所确定的函数称为 p 的 **Γ函数**。记作

$$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{p-1}\mathrm{d}x \tag{I.3}$$

在式(I·3)中令 $x=t^2$，则可将 Γ 函数写成另一种形式

$$\Gamma(p)=2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}t^{2p-1}\mathrm{d}t \tag{I.4}$$

现在我们来建立 Γ 函数与 β 函数之间的关系。为此，先计算 $\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)$。由式(I·4)可得

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)=4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(\xi^2+\eta^2)}\xi^{2p-1}\eta^{2q-1}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{I.5}$$

令 $\xi = \rho\cos\theta, \eta = \rho\sin\theta$，则

$$\Gamma(p) \cdot \Gamma(q) = 4\int_0^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho^2}\rho^{2(p+q)-1}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta d\rho d\theta$$

$$= 2\int_0^{\infty} e^{-\rho^2} \cdot \rho^{2(p+q)-1}d\rho \cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta d\theta$$

将上式右端的两个积分分别与式(Ⅰ.2)、式(Ⅰ.4)比较，可得

$$\Gamma(p) \cdot \Gamma(q) = \Gamma(p+q) \cdot \beta(p \cdot q)$$

或
$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{Ⅰ.6}$$

式(Ⅰ.6)建立了 Γ 函数与 β 函数之间的关系，这个关系式也称为**欧拉定理**。借助于欧拉定理当其中一类函数的性质弄清楚了，另一类函数的性质亦可获得。

2. Γ 函数的性质

1)递推公式 $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ (Ⅰ.7)

证：由定义我们有

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^p dx = -\int_0^{+\infty} x^p de^{-x}$$

$$= -x^p e^{-x}\big|_0^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{p-1}dx$$

当 $p>0$ 时，$x^p e^{-x}|_0^{\infty}=0$，所以 $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$

重复利用这个公式可得

$$\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1) = (p-1)(p-2)\Gamma(p-2) = \cdots$$

$$= (p-1)(p-2)\cdots(p-m)\Gamma(p-m) \tag{Ⅰ.8}$$

此式说明，自变量大于 1 时 Γ 函数值的计算可化为自变量小于 1 时 Γ 函数值的计算。

如果 p 是正整数，则由式(Ⅰ.8)可得

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) = p(p-1)\cdots 2.1.\Gamma(1)$$

而 $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$，故

$$\Gamma(p+1) = p! \tag{Ⅰ.9}$$

2)Γ 函数定义域的扩充

利用 Γ 函数的递推公式(Ⅰ.7),我们可将 $\Gamma(p)$ 的定义域扩充到不含负整数的负数域上去,例如,对 $-1<p<0$,我们定义

$$\Gamma(p)=\frac{\Gamma(p+1)}{p} \tag{Ⅰ.10}$$

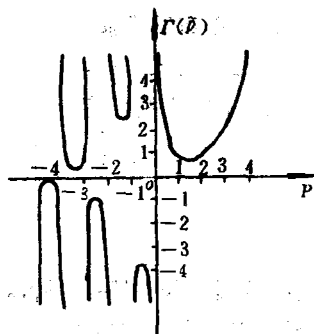
这里 $p+1>0$,所以上式右端具有确定的值。

Γ 函数在 $-1<p<0$ 内的值既已确定,就可再用(Ⅰ.10)定义出 $-2<p<-1$ 内 Γ 函数的值。这样逐步进行下去,就可将 Γ 函数的定义域扩充到不包含负整数的负数域上去。

在负整数处,Γ 函数会怎样? 由式(Ⅰ.10)可知

$$\lim_{p\to 0}\Gamma(p)=\lim_{p\to 0}\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p)}=\infty$$

即当 $p\to 0$ 时,$\Gamma(p)\to\infty$。利用这个结果,可以推得当 $p\to -1,p\to -2,\cdots,p\to -k$($k$ 为正整数)时,$\Gamma(p)\to\infty$,从而,我们规定当 $k=0,-1,-2,\cdots$ 时,$\frac{1}{\Gamma(k)}=0$,函数的图形如图(Ⅰ-1)所示。



图Ⅰ-1

3. 当 $0<p<1$ 时,

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi} \tag{Ⅰ.11}$$

证: 由式(Ⅰ.6)得

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\Gamma(1)\beta(1-p\cdot p)$$

$$=\beta(1-p\cdot p)=\int_0^1 x^{-p}(1-x)^{p-1}\mathrm{d}x$$

令 $t=\frac{1-x}{x}$,则

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\int_0^{\infty}\frac{t^{p-1}}{1+t}\mathrm{d}t \quad 0<p<1$$

我们用留数定理来计算上式右端的积分。取积分路径如图 I-2 所示。这个路径是由以支点 z 为中心的小圆与大圆以及沿实轴两条方向相反的线段 EA 与 CD（在 EA 上假设 z 的幅角为 0，而沿 CD 上 z 的幅角为 2π）所组成。由于沿正实轴作了割线，所以函数 $\dfrac{z^{p-1}}{1+z}$ 是单值的，利用留数定理得

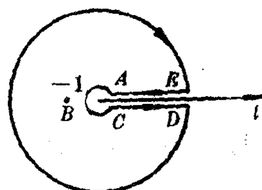


图 I-2

$$\oint\limits_{c_R+c_r+EA+CD}\frac{z^{p-1}}{1+z}\mathrm{d}z=-2\pi i\operatorname*{Res}_{z=-1}\left[\frac{z^{p-1}}{1+z}\right]$$

而 $$\left|\oint\limits_{c_R}\frac{z^{p-1}}{1+z}\mathrm{d}z\right|\leqslant\int_0^{2\pi}\left|\frac{R^{p-1}\mathrm{e}^{i(p-1)\varphi}}{1+R\mathrm{e}^{i\varphi}}iR\mathrm{e}^{i\varphi}\right|\mathrm{d}\varphi$$

$$\leqslant\int_0^{2\pi}\frac{R^p}{R-1}\mathrm{d}\varphi=2\pi\frac{R^p}{R-1}$$

$$=2\pi\frac{R^{p-1}}{1-\dfrac{1}{R}}=0(R^{-(1-p)})\to 0\quad 当 R\to\infty 时,$$

$$\left|\oint\limits_{c_r}\frac{z^{p-1}}{1+z}\mathrm{d}z\right|=\left|\int_0^{2\pi}-\frac{r^{p-1}\mathrm{e}^{i(p-1)\varphi}}{1+r\mathrm{e}^{i\varphi}}ir\mathrm{e}^{i\varphi}\mathrm{d}\varphi\right|$$

$$\leqslant\int_0^{2\pi}\left|\frac{(r\mathrm{e}^{i\varphi})^p}{1+r\mathrm{e}^{i\varphi}}\right|\mathrm{d}\varphi\leqslant\int_0^{2\pi}\frac{r^p}{1-r}\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{2\pi r^p}{1-r}=0(r^p)\to 0\quad 当 r\to 0 时。$$

$$\int\limits_{EA}\frac{z^{p-1}}{1+z}\mathrm{d}z=\int_R^r\frac{t^{p-1}}{1+t}\mathrm{d}t\to\int_0^\infty\frac{t^{p-1}}{1+t}\mathrm{d}t\quad 当 R\to\infty\quad r\to 0 时,$$

$$\int\limits_{CD}\frac{z^{p-1}}{1+z}\mathrm{d}z=\int_r^R\frac{(t\mathrm{e}^{i2\pi})^{p-1}}{1+t\mathrm{e}^{i2\pi}}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{ip2\pi}\int_r^R\frac{t^{p-1}}{1+t}\mathrm{d}t$$

$$\to\mathrm{e}^{ip2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{1+t}\mathrm{d}t\quad R\to\infty\quad r\to 0 时,$$

且 $\operatorname*{Res}_{z=-1}\left[\dfrac{z^{p-1}}{1+z}\right]=\mathrm{e}^{i(p-1)\pi}$，故

$$(\mathrm{e}^{2\pi pi}-1)\int_0^\infty\frac{t^{p-1}}{1+t}\mathrm{d}t=-2\pi i\mathrm{e}^{(p-1)\pi i}$$

即 $\int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{1+t}\mathrm{d}t = -2\pi i \frac{e^{(p-1)\pi i}}{e^{2\pi p i}-1} = -2\pi i e^{-\pi i}\frac{1}{e^{p\pi i}-e^{-p\pi i}}$

$$= \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

特别是，当 $p=\frac{1}{2}$ 时，由性质 3 得

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \pi, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

误差函数 $\mathrm{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^y e^{-t^2}\mathrm{d}t, \mathrm{erf}(\infty) = 1$

$$\mathrm{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[y - \frac{y^3}{1!3} + \frac{y^5}{2!5} - \frac{y^7}{3!7} + \cdots\right]$$

余误差函数 $\mathrm{erfc}(y) = 1 - \mathrm{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_y^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$

附录 I　富氏变换与拉氏变换简表

一、富氏变换

象原函数	象　函　数
$f(x)$	$F(\lambda)$
$f'(x)$	$(i\lambda)F(\lambda)$
$f^{(n)}(x)$	$(i\lambda)^n F(\lambda)$
$f(x)e^{i\alpha x}$	$F(\lambda-\alpha)$
$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(x-\tau)d\tau$	$F_1(\lambda)\cdot F_2(\lambda)$，其中 $F_i(\lambda)$ 是 $f_i(x)$ 的富氏变换
$f(x)=\begin{cases} E & \|x\|\leqslant\frac{\tau}{2} \\ 0 & 其它 \end{cases}$	$2E\dfrac{\sin\frac{\lambda\tau}{2}}{\lambda}$
$f(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ e^{-\alpha x} & x\geqslant 0 \end{cases}$	$\dfrac{1}{\alpha+i\lambda}$
$f(x)=Ae^{-\alpha x^2}(\alpha>0)$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}Ae^{-\frac{\lambda^2}{4\alpha}}$
$8(x)$	1
$u(x)$	$\dfrac{1}{i\lambda}+\pi\delta(\lambda)$
$u(x)\cdot x$	$\left(\dfrac{1}{i\lambda}\right)^2$
$u(x)e^{-\alpha x}\quad \alpha>0$	$\dfrac{1}{\alpha+i\lambda}$
$u(x)\sin\alpha x$	$\dfrac{\alpha}{\alpha^2-\lambda^2}$
$u(x)\cos\alpha x$	$\dfrac{i\lambda}{\alpha^2-\lambda^2}$
$\cos\alpha x$	$\pi[\delta(\lambda-\alpha)+\delta(\lambda+\alpha)]$
$\sin\alpha x$	$i\pi[\delta(\lambda+\alpha)-\delta(\lambda-\alpha)]$
$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$	$e^{-\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}}$

续表

象原函数	象 函 数
$\frac{1}{a^2+x^2}$ Re$(a)<0$	$-\frac{\pi}{a}e^{a\|\lambda\|}$
$\frac{x}{(a^2+x^2)^2}$ Re$(a)<0$	$\frac{i\lambda\pi}{2a}e^{a\|\lambda\|}$
$\frac{e^{i}bx}{a^2+x^2}$ Re$(a)<0$,b 为实数	$-\frac{\pi}{a}e^{a\|\lambda-b\|}$
$\frac{\cos bx}{a^2+x^2}$ Re$(a)<0$,b 为实数	$-\frac{\pi}{2a}[e^{a\|\lambda-b\|}+e^{a\|\lambda+b\|}]$
$\frac{\sin bx}{a^2+x^2}$ Re$a<0$,b 为实数	$-\frac{\pi}{2ai}[e^{a\|\lambda-b\|}-e^{a\|\lambda+b\|}]$
$\|x\|$	$-\frac{2}{\lambda^2}$
$\frac{1}{\|x\|}$	$\frac{\sqrt{2\pi}}{\|\lambda\|}$

二、拉氏变换

象原函数	象 函 数
$f(x)$	$F(s)$
$f^{(k)}(x)$	$s^kF(s)-[s^{k-1}f(0)+s^{k-2}f^1(0)+\cdots+f^{(k-1)}(0)]$
$(-x)^kf(x)$	$F^{(k)}(s)$
$\int_0^t f(x)\mathrm{d}x$	$\frac{F(s)}{s}$
$f(x-\tau)$	$e^{-s\tau}F(s)$
$e^{s_0x}f(x)$	$F(s-s_0)$
$\int_0^t f_1(x)f_2(t-x)\mathrm{d}x$	$F_1(s)\cdot F_2(x)$。其中 $F_i(s)$是 $\rho_i(x)$的拉氏变换
1	$\frac{1}{s}$
$\delta(x)$	1
$\delta'(x)$	s
$u(x)$	$\frac{1}{s}$
$xu(x)$	$\frac{1}{s^2}$

象原函数	象 函 数
$x^k u(x)$ $(k>-1)$	$\frac{1}{s^{k+1}}\Gamma(k+1)$
e^{ax}	$\frac{1}{s-a}$
x^k $(k>-1)$	$\frac{1}{s^{k+1}}\Gamma(k+1)$
$\sin ax$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos ax$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\mathrm{sh}ax$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\mathrm{ch}ax$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$x\sin ax$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
$x\cos ax$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
$x\mathrm{sh}ax$	$\frac{2as}{(s^2-a^2)^2}$
$x\mathrm{ch}ax$	$\frac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$
$e^{-bx}\sin ax$	$\frac{a}{(s+b)^2+a^2}$
$e^{-bx}\cos ax$	$\frac{s+b}{(s+b)^2+a^2}$
$\sin^2 x$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4}\right)$
$\cos^2 x$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+4}\right)$
$e^{ax}-e^{bx}$	$\frac{a-b}{(s-a)(s-b)}$
$ae^{ax}-be^{bx}$	$\frac{(a-b)s}{(s-a)(s-b)}$

续表

象原函数	象 函 数
$\frac{1}{a}\sin ax-\frac{1}{b}\sin bx$	$\frac{b^2-a^2}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
$\cos ax-\cos bx$	$\frac{(b^2-a^2)s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
$\frac{1}{a^2}(1-\cos ax)$	$\frac{1}{s(s^2+a^2)}$
$\frac{1}{a^3}(ax-\sin ax)$	$\frac{1}{s^2(s^2+a^2)}$
$(1-ax)\mathrm{e}^{-ax}$	$\frac{s}{(s+a)^2}$
$\frac{1}{a}(1-\mathrm{e}^{-ax})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi x}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$
$2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$	$\frac{1}{s\sqrt{s}}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\cos 2\sqrt{ax}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}\mathrm{e}^{-\frac{a}{s}}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\sin 2\sqrt{ax}$	$\frac{1}{s\sqrt{s}}\mathrm{e}^{-\frac{a}{s}}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\mathrm{ch}2\sqrt{ax}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}\mathrm{e}^{\frac{a}{s}}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\mathrm{sh}2\sqrt{ax}$	$\frac{1}{s\sqrt{s}}\mathrm{e}^{\frac{a}{s}}$
$\mathrm{erf}\sqrt{ax}$	$\frac{\sqrt{a}}{s\sqrt{s+a}}$
$\mathrm{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{x}}\right)$	$\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-a\sqrt{s}}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\mathrm{e}^{-2\sqrt{ax}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}\mathrm{e}^{\frac{a}{s}}\mathrm{erfc}\left(\sqrt{\frac{a}{s}}\right)$
$\frac{1}{\sqrt{a}}\mathrm{erfc}\sqrt{ax}$	$\frac{1}{s\sqrt{s+a}}$
$J_0(x)$	$\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$

续表

象原函数	象　函　数
$J_0(ax)$	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$
$I_0(ax)$	$\frac{1}{\sqrt{s^2-a^2}}$
$J_0(2\sqrt{as})$	$\frac{1}{s}e^{-\frac{a}{s}}$
$e^{-bx}I_0(ax)$	$\frac{1}{\sqrt{(s+b)^2-a^2}}$
$xJ_0(ax)$	$\frac{s}{(s^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$
$xI_0(ax)$	$\frac{s}{(s^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}$
$e^x\mathrm{erfc}(\sqrt{x})$	$\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}$
$J_k(ax)$, $\mathrm{Re}(k)>-1$	$\frac{a^k}{\sqrt{a^2+s^2}}\left(\frac{1}{s+\sqrt{a^2+s^2}}\right)^k$

附录Ⅱ　分离变量法表解

方程	定解条件：初值	定解条件：边值	固有值	固有函数	求解公式
		$u(0,t)=0$ $u(l,t)=0$	$\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$ $k=1,2,3,\cdots$	$\sin\frac{k\pi}{l}x$	$u=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi a}{l}t+b_k\sin\frac{k\pi a}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x$ $a_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{k\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi$ $b_k=-\frac{2}{k\pi a}\int_0^l\psi(\xi)\sin\frac{k\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi$
		$u_x(0,t)=0$ $u_x(l,t)=0$	$\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$ $k=0,1,2,\cdots$	$\cos\frac{k\pi}{l}x$	$u=\frac{a_0}{2}+b_0t+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi a}{l}t+b_k\sin\frac{k\pi at}{l}\right)\cos\frac{k\pi}{l}x$ $a_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\cos\frac{k\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi$ $b_0=\frac{1}{l}\int_0^l\psi(\xi)\mathrm{d}\xi$ $b_k=\frac{2}{k\pi a}\int_0^l\psi(\xi)\cos\frac{k\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi$
		$u(0,t)=0$ $u_x(l,t)=0$	$\left[\frac{(2k-1)\pi}{2l}\right]^2$ $k=1,2,3,\cdots$	$\sin\frac{(2k-1)\pi}{2l}x$	$u=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{(2k-1)\pi a}{2l}t+b_k\sin\frac{(2k-1)\pi a}{2l}t\right)\sin\frac{(2k-1)\pi}{2l}x$ $a_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{(2k-1)\pi}{2l}\xi\mathrm{d}\xi$ $b_k=\frac{4}{(2k-1)\pi a}\int_0^l\psi(\xi)\sin\frac{(2k-1)\pi}{2l}\xi\mathrm{d}\xi$
		$u_x(0,t)=0$ $u(l,t)=0$	$\left[\frac{(2k-1)\pi}{2l}\right]^2$ $k=1,2,3,\cdots$	$\cos\frac{(2k-1)\pi}{2l}x$	$u=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{(2k-1)\pi a}{2l}t+b_k\sin\frac{(2k-1)\pi a}{2l}t\right)\cos\frac{(2k-1)\pi}{2l}x$ $a_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\cos\frac{(2k-1)\pi}{2l}\xi\mathrm{d}\xi$ $b_k=\frac{4}{(2k-1)\pi a}\int_0^l\psi(\xi)\cos\frac{(2k-1)\pi}{2l}\xi\mathrm{d}\xi$

续表

方程	定解条件		固有值	固有函数	求解公式
	初值	边值			
		$u(0,t)=0$ $u(l,t)=0$	$\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$ $k=1,2,3,\cdots$	$\sin\frac{k\pi}{l}x$	$u=\sum_{k=1}^{\infty}c_k e^{-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 t}\sin\frac{k\pi}{l}x$ $c_k=\frac{2}{\rho}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{k\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi$
		$u_x(0,t)=0$ $u_x(l,t)=0$	$\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$ $k=0,1,2,\cdots$	$\cos\frac{k\pi}{l}x$	$u=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\bar{c}_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}\cos\frac{k\pi}{l}x$ $\bar{c}_k=\frac{2}{\rho}\int_0^l\varphi(\xi)\cos\frac{k\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi$
		$u(0,t)=0$ $u_x(l,t)=0$	$\left[\frac{(2k-1)\pi}{2l}\right]^2$ $k=1,2,3,\cdots$	$\sin\frac{(2k-1)\pi}{2l}x$	$u=$ $\sum_{k=1}^{\infty}c_k e^{-\left[\frac{(2k-1)\pi a}{2l}\right]^2 t}\sin\frac{(2k-1)\pi}{2l}x$ $c_k=\frac{2}{\rho}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{(2k-1)\pi}{2l}\xi\mathrm{d}\xi$
		$u_x(0,t)=0$ $u(l,t)=0$	$\left[\frac{(2k-1)\pi}{2l}\right]^2$ $k=1,2,3,\cdots$	$\cos\frac{(2k-1)\pi}{2l}x$	$u=$ $\sum_{k=1}^{\infty}\bar{c}_k e^{-\left[\frac{(2k-1)\pi a}{2l}\right]^2 t}\cos\frac{(2k-1)\pi}{2l}x$ $\bar{c}_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\cos\frac{(2k-1)\pi}{2l}\xi\mathrm{d}\xi$
		$u(0,y)$ $=\varphi(y)$ $u(a,y)$ $=\psi(y)$ $u(x,0)=0$ $u(x,b)=0$	$\left(\frac{k\pi}{b}\right)^2$ $k=1,2,3,\cdots$	$\sin\frac{k\pi}{b}y$	$u=\sum_{k=1}^{\infty}\left(e^{\frac{k\pi a}{b}}-e^{-\frac{k\pi a}{b}}\right)$ $\times(a_k e^{\frac{k\pi}{b}x}+b_k e^{-\frac{k\pi}{b}x})\sin\frac{k\pi}{b}y$ $a_k=\frac{2}{b}\int_0^b\left[\psi(\xi)-\psi(\xi)e^{-\frac{k\pi a}{b}}\right]\sin\frac{k\pi}{b}\xi\mathrm{d}\xi$ $b_k=\frac{2}{b}\int_0^b\left[\psi(\xi)e^{\frac{k\pi a}{b}}-\psi(\xi)\right]\sin\frac{k\pi\xi}{b}\mathrm{d}\xi$

续表

方程	定解条件		固有值	固有函数	求解公式
	初值	边值			
		$u(0,y)=0$ $u(a,y)=0$ $u(x,0)$ $=\psi(x)$ $u(x,b)$ $=\psi(x)$	$\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2$ $k=1,2,3,\cdots$	$\sin\frac{k\pi}{a}x$	$u=\sum_{k=1}^{\infty}\left(e^{\frac{k\pi b}{a}}-e^{-\frac{k\pi b}{a}}\right)$ $\times\left(a_k e^{\frac{k\pi y}{a}}+b_k e^{-\frac{k\pi y}{a}}\right)\sin\frac{k\pi x}{a}$ $a_k=\frac{2}{a}\int_0^a\left[\psi(\xi)-\varphi(\xi)e^{-\frac{k\pi b}{a}}\right]\sin\frac{k\pi\xi}{a}d\xi$ $b_k=\frac{2}{a}\int_0^a\left[\varphi(\xi)e^{\frac{k\pi b}{a}}-\psi(\xi)\right]\sin\frac{k\pi\xi}{a}d\xi$
		$u(a,\theta)$ $=f(\theta)$ $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$	$a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta$ $k=0,1,2,\cdots$		$u=$ $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta)\left(\frac{r}{a}\right)^{\pm k}$ （$r\leqslant a$ 时　取 $+k$；$r>a$ 时　取 $-k$） $a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\xi)\cos k\xi d\xi$ $b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\xi)\sin k\xi d\xi$

附录Ⅳ 格林函数法表解

表Ⅳ-1 $u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t)$

定解条件		格林函数 $G(x,t;\xi,\tau)$	求解公式
初值	边值		
$u(x,0)=0$ $u_t(x,0)=0$ $0\leqslant x\leqslant l$	$u(0,t)=0$ $u(l,t)=0$	$\frac{2}{\pi a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi\xi}{l}\sin\frac{k\pi a(t-\tau)}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}$	$\int_0^t\int_0^l f(\xi,\tau)\cdot G\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau$
	$u_x(0,t)=0$ $u_x(l,t)=0$	$\frac{t-\tau}{l}+\frac{2}{\pi a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cos\frac{k\pi}{l}\xi\sin\frac{k\pi a(t-\tau)}{l}\cos\frac{k\pi x}{l}$	
	$u(0,t)=0$ $u_x(l,t)=0$	$\frac{2}{\pi a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{2k+1}\sin\frac{(2k+1)\pi\xi}{2l}\sin\frac{(2k+1)\pi a(t-\tau)}{2l}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}$	
	$u_x(0,t)=0$ $u(l,t)=0$	$\frac{2}{\pi a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{2k+1}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2l}\xi\sin\frac{(2k+1)\pi a(t-\tau)}{2l}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2l}x$	
$u(x,0)=0$ $u_t(x,0)=0$ $-\infty<x<+\infty$		$\begin{cases}0 & \xi\overline{\in}(x-a(t-\tau),x+a(t-\tau))\\ 2a & \xi\in(x-a(t-\tau),x+a(t-\tau))\end{cases}$	$\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\cdot f(\xi,\tau)G\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau$

附录Ⅳ 格林函数法表解

表Ⅳ-2 $u_t-a^2u_{xx}=f(x,t)$

定解条件		格林函数 G	求解公式
初值	边值		
$u(x,0)=0$ $0\leqslant x\leqslant l$	$u(0,t)=0$ $u(l,t)=0$	$\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{k\pi\xi}{l}\cdot e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2(t-\tau)}\cdot\sin\frac{k\pi}{l}x$	$\int_0^t\int_0^l f(\xi,t)\cdot Gd\xi d\tau$ $0\leqslant x\leqslant l$ $t\geqslant 0$
	$u_x(0,t)=0$ $u_x(l,t)=0$	$\frac{1}{l}+\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\cos\frac{k\pi\xi}{l}\cdot e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2(t-\tau)}\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}$	
	$u(0,t)=0$ $u_x(l,t)=0$	$\frac{2}{l}\sum_{k=0}^{\infty}\sin\frac{(2k+1)\pi\xi}{2l}\cdot e^{-\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2l}\right)^2(t-\tau)}\cdot\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}$	
	$u_x(0,t)=0$ $u(l,t)=0$	$\frac{2}{l}\sum_{k=0}^{\infty}\cos\frac{(2k+1)\pi\xi}{2l}\cdot e^{-\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2l}\right)^2(t-\tau)}\cdot\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2l}$	
$u(x,0)=0$ $-\infty<x<+\infty$		$\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}$	$\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\tau)\cdot Gd\xi d\tau$ $-\infty<x<+\infty$ $t\geqslant 0$

表Ⅳ-3　　　　$\Delta u=F$

区域 Ω	边　值	格　林　函　数　G	求解公式
求平面 $y\geqslant 0$	$u_\Gamma=\varphi(M)$ Γ 为 Ω 的边界	$\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{r_{H_0M}}-\ln\frac{1}{r_{M_1M}}\right]$	公式(6.3.10)
圆 $x^2+y^2\varphi\leqslant a^2$	$u\|_\Gamma=\varphi(M)$ Γ 为 Ω 的边界	$\frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r_{MM_0}}-\ln\frac{a}{\rho_0 r_{MM_0}}\right)$	
半圆 $y\leqslant\sqrt{a^2-x^2}$		$\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{rP_{H_0}}-\ln\frac{a}{\rho_0 r_{MM_1}}-\ln\frac{1}{r_{MM_2}}-\ln\frac{a}{\rho_0 r_{MM_3}}\right]$	
求空间 $z\geqslant 0$	$u\|_{z=0}=f(x,y)$ $\lim\limits_{\rho\to 0}(u=0)$	$\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{r_{MM_0}}-\frac{1}{r_{MM_1}}\right]$	
球 $x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$		$\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{r_{MM_0}}-\frac{a}{\rho r_{MM_1}}\right]$	

对于 $\Delta u=0$，将求解公式换成式(6.3.5)。

附录V　一些预备知识

1. 函数的一致连续性

1)　定义：设函数 $f(x)$在某区域 I（有限或无限）上有定义。若对任意给定的 $\varepsilon>0$，都存在一 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得对区域 I 上的任意两点 x_1 和 x_2，当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，不等式

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

恒成立。则称函数 $f(x)$在区域 I 上是一致连续的。

2)Confor 定理。在闭区间$[a,b]$上连续的函数，必在这区间上一致连续。

2. 含参变量的积分

1)含参变量的积分，若函数 $f(x,y)$在矩形域$[a,b;c,d]$上有界，当 y 固定为$[c,d]$上的任一点 y_0 时，函数 $f(x,y_0)$若在$[a,b]$上可积，则数值 $\int_a^b f(x,y_0)\mathrm{d}x$ 与 y_0 有关，当 y_0 在$[c,d]$上变化时，所得积分值一般是不相同的。即

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$$

是 y 的函数，定义域为$[c,d]$，被积函数中的 y 在对 x 积分过程中不变，通常称为参变量。并称 $\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ 为含参变量的积分。

这种由含一个参变量的定积分来确定的函数 $I(y)$有很多应用。下面列述一些有关它的连续性，可微性及可积性的定理。

定理 1　设函数 $f(x,y)$在矩形域$[a,b;c,d]$上连续，则

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$$

是$[c,d]$上的连续函数。

这个定理又可写成如下的形式

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)\mathrm{d}x$$

定理 2　设函数 $f(x,y)$及 $f'_y(x,y)$在矩形域：$[a,b;c,d]$上

连续，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\mathrm{d}x$$

即微分运算与积分运算可以交换。

对于形如

$$F(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

的积分，下述三个定理成立。

定理 3 若函数 $f(x,y)$ 在矩形域 $[a,b;c,d]$ 上连续，函数 $a(y)$ 及 $b(y)$ 都在 $[c,d]$ 上连续且 $a\leqslant a(y)\leqslant b, a\leqslant b(y)\leqslant b$，则

$$F(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

在区间 $[c,d]$ 上连续。

定理 4 若函数 $f(x,y)$，$f'_y(x,y)$ 都在区域 $[a,b;c,d]$ 上连续，$a'(y)$，$b'(y)$ 在区间 $[c,d]$ 上都存在，且 $a\leqslant a(y)\leqslant b, a\leqslant b(y)\leqslant b$，则

$$\begin{aligned} F'(y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\mathrm{d}x \\ &= \int_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x,y)\mathrm{d}x + f[b(y),y]b'(y) - f[a(y),y]a'(y) \end{aligned}$$

定理 5 若函数 $f(x,y)$ 在矩形域 $[a,b;c,d]$ 上连续，则

$$\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$$

即积分顺序可以交换。

2)含参变量的广义积分。

当含参变量的积分的积分区间为无穷区间，或被积函数在有限积分区间上无界时，就称为含参变量的广义积分。

首先我们定义广义积分的一致收敛性。

定义(1) 若对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在一个 $N_0(\varepsilon)>a$，当 N'，$N>N_0$ 时，对一切 $y\in[c,d]$ 恒成立

$$\left|\int_N^{N'} f(x,y)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon \text{ 或 } \left|\int_N^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

则称含参变量广义积分 $\int_N^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 关于参变量 y 在区间 $[c,d]$ 上一致收敛。

定义(2) 设函数 $f(x,y)$ 在矩形区域 $[a,b;c,d]$ 上有定义，且对每一个 $y\in[c,d]$ 都有 $x\to b$ 时，$f(x,y)$ 无界，如果对任何 $\varepsilon>0$，存在与 $[c,d]$ 上的 y 无关的 $\delta_0(\varepsilon)$，使当 $0<\eta,\eta'<\delta_0(\varepsilon)$ 时恒成立

$$\left|\int_{b-\eta}^{b-\eta'} f(x,y)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon \text{ 或 } \left|\int_{b-\eta}^{b} f(x,y)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

则称 $\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ 关于参变量 y 在 $[c,d]$ 上一致收敛。

收敛性判别法则(Wiersfrass)

设有函数 $F(x)$ 使

$$|f(x,y)| \leqslant F(x) \quad (a < x < +\infty \quad c \leqslant y \leqslant d)$$

如果 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 $y\in[c,d]$ 一致收敛。

定理 1 (存在与连续性定理)。设 $f(x,y)$ 在区域 $[a,\infty;c,d]$ 上连续，$\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 y 在 $[c,d]$ 上一致收敛，则函数

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$$

存在，且是 y 在 $[c,d]$ 上的连续函数。

由此知

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} \lim_{y\to y_0} f(x,y)\mathrm{d}x$$

即极限运算与积分运算可以交换。

定理 2 设 $f(x,y)$ 在区域 $[a,\infty;,c,d]$ 上连续，$\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 $y\in[c,d]$ 一致收敛，则

$$\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^{\infty}\mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$$

即积分顺序可以交换。

当 y 的变动区间也是无穷的时，也有类似的定理。

定理 3 设 $f(x,y)$ 在 $[a,\infty;c,\infty]$ 上连续，两个积分 $\int_a^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$，$\int_c^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 依次关于 y 在任何区间 $[c,d]$ 上，关于 x 在任何区间 $[a,b]$ 上一致收敛，且

$$\int_a^{\infty}\mathrm{d}x\int_c^{\infty}|f(x,y)|\mathrm{d}y,\quad \int_c^{\infty}\mathrm{d}y\int_a^{\infty}|f(x,y)|\mathrm{d}x$$

有一个存在，则

$$\int_a^{\infty}\mathrm{d}x\int_c^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^{\infty}\mathrm{d}y\int_a^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$$

定理 4 设 $f(x,y)$，$f'_y(x,y)$ 在 $[a,\infty;c,d]$ 上连续，$\int_a^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 存在，$\int_a^{\infty} f'_y(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 y 在 $[c,d]$ 上一致收敛，则

$$I(y)=\int_a^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$$

的微商存在，且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^{\infty}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\mathrm{d}x$$

即微分运算与积分运算可以交换。

3. 级数与富氏级数的一致收敛性

1)级数一致收敛性定义。

设函数项级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ 在某区间 I（有限或无限，闭或非闭）收敛于 $s(x)$，如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在与 x 无关的仅依赖于 ε 的正整数 N，使当 $n>N$ 时，不等式

$$|s(x)-s_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)\right|<\varepsilon$$

对所有的 $x\in I$ 均成立，则称级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ 在 I 上一致收敛或均匀收敛。

2)(Weiersfrass)判别准则

设函数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ 中各项在区间 I 上满足

$$|u_k(x)| \leqslant M_k \quad (k=1,2,3,\cdots)$$

且数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ 收敛，则 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ 在 I 上一致收敛。

3) 一致收敛级数的一些性质。

(1) 设 $u_k(x)$ 在 I 上连续，$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ 在 I 上一致收敛于 $s(x)$，则 $s(x)$ 在 I 上连续

(2) 设 $u_k(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $s(x)$，则 $s(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且可逐项积分（积分后所得级数在 $[a,b]$ 上也一致收敛）

$$\int_a^b s(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_a^b u_k(x)\mathrm{d}x\right)$$

(3) 若 $s(x)=\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$，($x\in[a,b]$) 的各项 $u_k(x)\in c'$ 且级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛。又 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ 在 $[a,b]$ 上收敛，则其和函数 $s(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导数，且可逐项微分。

$$s'(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$$

关于富里埃级数的一致收敛。

若 $f(x)$ 分段光滑，$f(x)$ 连续，则

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

一致收敛于 $f(x)$。

习题参考答案

习 题 一

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial}{\partial x}\left[(l-x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]-f(x)\quad f(x)=\frac{F(x)}{\rho}$

3. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{2}\omega^2\frac{\partial}{\partial x}\left[(l^2-x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right]$

4. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-g\frac{\partial}{\partial x}\left[(l-x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]-\omega^2 u=0$

5. $\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}\quad(0<x<l,t>0)\\ u|_{t=0}=\frac{x(l-x)}{2}\\ u|_{x=0}=0,u_x|_{x=l}=\frac{q}{k}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}\quad(0<x<l,t>0)\\ u|_{t=0}=\frac{x(l-x)}{2}\\ u_x|_{x=0}=-\frac{q}{k},u|_{x=l}=0\end{cases}$

6. $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{c\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]-\frac{4k}{c\rho l}(u-u_1)$

7. $u_t=a^2u_{xx}\quad\left(a^2=\frac{k}{c\rho}\right)$

8. $c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)+f(x,y,z,t)$ （$f(x,y,z,t)$ 为热源密度）

或 $u_t=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})\quad a^2=\frac{k}{c\rho}$ （c,ρ,k 均为常数）

9. $ys\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0}=F_0,ys\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}=F_0$

10. $k\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0}=-q_0$

11. (1) $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\frac{\partial u}{\partial\eta}=0$　　(2) $4(\xi+\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}=0$

(3) $\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}-\frac{2\xi}{\eta^2}\frac{\partial u}{\partial\xi}=0$　　(4) $\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=0$

(5) $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial\eta}-\frac{8}{9}$ 或 $\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}=\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial\alpha}-\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial\beta}-\frac{8}{9}$

12. (1)　椭圆型

(2)　在 x 轴或 y 轴上属抛物型；在 Ⅱ、Ⅳ 象限属双曲型；在 Ⅰ、Ⅲ 象限属椭圆型。

(3)　双曲型

习 题 二

1. $u(x,t) = 3x^2 + y^2$

2. $u(x,t) = \varphi\left(\frac{x+at}{2}\right) + \psi\left(\frac{x-at}{2}\right) - \varphi(0)$

3. (1) $u(x,t) = t\sin x$

(2) $u(x,t) = \frac{1}{4a^3}[(x - at - 2a^2)\operatorname{arctg}(x - at) - (x + at - 2a^2)]$

$$\operatorname{arctg}(x + at) + 2at\operatorname{arctg}x + \frac{1}{2}\ln\frac{1+(x+at)^2}{1+(x-at)^2}$$

(3) $u(x,t) = x + \frac{1}{2}x^2t^2 + \frac{a^2}{12}t^4$

4. $u(x,y,z,t) = x^3 + 3xa^2t^2 + yz$

6. $u(x,y,t) = x^2(x+y) + a^2t^2(3x+y)$

7. $u(x,y,t) =$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2\pi a}\int_0^{2\pi}\int_0^{at}\frac{\operatorname{ch}\sqrt{c^2t^2-\left(\frac{c}{a}r\right)^2}}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}\varphi(x+r\cos\theta, y+r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\right\}$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\int_0^{2\pi}\int_0^{at}\frac{\operatorname{ch}\sqrt{c^2t^2-\left(\frac{c}{a}r\right)^2}}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}\psi(x+r\cos\theta, y+r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

习 题 三

1. (1) $u(x,t)$

$$= \cos\frac{3a\pi}{l}t\sin\frac{3\pi}{l}x + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{8l^3}{[(2n+1)\pi]^4a}\sin\frac{(2n+1)\pi at}{l}\sin\frac{(2n+1)}{l}\pi x$$

(2) $u(x,t)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{4}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi}{2}\cos n\pi at + \frac{4}{n^4\pi^4a}[(-1)^n+1]\sin n\pi at\right\}\sin n\pi x$$

(3) $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin\frac{2n+1}{2}\xi\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{e}^{-\frac{a^2(2n+1)^2}{4}t}\sin\frac{2n+1}{2}x$

(4) $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{(2n+1)^2\pi^2}\mathrm{e}^{-(2n+1)^2\pi^2t}\sin(2n+1)\pi x$

(5) $u(x,t) = \frac{1}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{a}b}\operatorname{sh}\frac{\pi}{a}(b-y)\sin\frac{\pi}{a}x$

2. (1) $u(x,t)=\dfrac{x(1-x^2)}{6a^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2(-1)^n}{(n\pi)^3a^2}\cos n\pi at\sin n\pi x$

(2) $u(x,t)=\dfrac{2bl^2}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\pi(n^2\pi^2+l^2)}\cos\dfrac{n\pi a}{l}t\sin\dfrac{n\pi}{l}x+\dfrac{b}{a^2}\left[\dfrac{\mathrm{sh}l}{l}x-\mathrm{sh}x\right]$

(3) $u(x,t)=\dfrac{A}{\omega}(1-\cos\omega t)$

3. $u(x,t)=u_0\dfrac{b\mathrm{ch}\dfrac{b}{a}(l-x)+ha\mathrm{sh}\dfrac{b}{a}(l-x)}{b\mathrm{ch}\dfrac{b}{a}l+ha\mathrm{sh}\dfrac{b}{a}l}$

$$-\frac{2u_0a^2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu n^2(q^2+\mu_n^2)}{(a^2\mu_n^2+b^2l^2)(q^2+q+\mu_n^2)}e^{-\left(\frac{a^2\mu_n^2}{l^2}+b^2\right)t}\sin\frac{\mu_n}{l}x$$

其中 μ_n 满足 $\mathrm{tg}\mu=-\dfrac{\mu}{q}(q=hl)$

或　$u(x,t)=u_0(1-\dfrac{h}{1+hl}x)$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_0l}{\mu_nN_n\left[a^2\left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2+b^2\right]}\left\{a^2\left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2e^{-[a^2(\frac{\mu_n}{l})^2+b^2]t}+b^2\right\}\sin\frac{\mu_n}{l}x$$

4. (1) $u(x,t)=u_0+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{l}\int_0^l[f(\xi)-u_0]\sin\dfrac{n\pi}{l}\xi d\xi e^{-[(\frac{n\pi a}{l})^2+\beta]t}\sin\dfrac{n\pi x}{l}$

(2) $u(x,t)=\dfrac{2bl^2}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\pi(n^2\pi^2+l^2)}\cos\dfrac{n\pi a}{l}+\sin\dfrac{n\pi}{l}x$

$$+\frac{b}{a^2}\left[\frac{\mathrm{sh}l}{l}x-\mathrm{sh}x\right]$$

(3) $u(x,t)=kx-\dfrac{8kl}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\cos\dfrac{(2n+1)\pi a}{2l}t\sin\dfrac{2n+1}{l}\pi x$

5. (1) $u(\bar{\rho},\bar{\theta})=F(\bar{\rho},\bar{\theta})+v(\bar{\rho},\bar{\theta})$，其中

$$F(\bar{\rho},\bar{\theta})=-\frac{2f(\pi)}{\pi}\mathrm{arctg}\frac{\bar{\rho}\sin\bar{\theta}}{\bar{\rho}\cos\bar{\theta}-\bar{a}}-\frac{2f(0)}{\pi}\mathrm{arctg}\frac{\bar{\rho}\sin\theta}{\bar{\rho}\cos\theta+\bar{a}}$$

$$v(\bar{\rho},\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(\bar{\rho},\bar{\theta})\frac{\bar{a}^1-\bar{\rho}^2}{\bar{\rho}^2+\bar{a}^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)}d\bar{\theta}$$

(2) $u(x,t)=A+\dfrac{A(b-2)x}{2a}-\dfrac{4Ab}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}\cdot$

$$\frac{\mathrm{sh}\frac{2n+1}{b}\pi x}{\mathrm{sh}\frac{2n+1}{b}\pi a}\cos\frac{2n+1}{b}\pi y$$

6. $u(x,y)=\frac{1}{2}(x^2-a^2)(py+q)+\frac{16a^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\cdot\frac{1}{\text{sh}\,\frac{2n+1}{2a}\pi b}$

$\times[q\text{sh}\,\frac{2n+1}{2a}\pi(b-y)+(pb+q)\text{sh}\,\frac{2n+1}{2a}\pi y]\cos\frac{2n+1}{2a}\pi x$

7. $u(x,y)=a^2-(x^2+y^2)$

习 题 四

1. (1) $\lambda_n=n^2,u_n(x)=\sin nx\quad(n=1,2,3,\cdots)$

(2) $\lambda_n=n^2,u_n(x)=\cos nx\quad(n=1,2,3,\cdots)$

(3) $\lambda_n=\upsilon_n^2,\{\sin\upsilon_n x\},\{\cos\upsilon_n x\}\ (n=1,2,3,\cdots)$

2. (1) $\lambda_n=0,(n\pi^2)\ u_n(x)=1,\sin n\pi x,\cos n\pi x\quad(n=1,2,3,\cdots)$

(2) $\lambda_n=n^2,u_n(x)=\sin nx,\cos nx\quad(n=1,2,3,\cdots)$

3. (1) $a_n=-\frac{3}{4}+(n\pi)^2\ u_n(x)=(\sin n\pi x)\text{e}^{-\frac{x}{2}}\quad(n=1,2,3,\cdots)$

(2) $\lambda_n=\upsilon_n^2,u_n(x)=\text{e}^{-x}\sin\upsilon_n x\quad(n=1,2,3,\cdots)$

(3) $\lambda_n=\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{4}+n^2\right)\quad u_n(x)=\sin nx,\cos nx\quad(n=1,2,3,\cdots)$

4. (1) $\lambda_n=1+(n\pi)^2,u_n(x)=\frac{1}{x}\sin(n\pi\ln x)\quad n=1,2,3,\cdots$

(2) $\lambda_n=\frac{1}{4}+\left(\frac{n\pi}{\ln 3}\right)^2$

$u_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2+x}}\sin\left[\left(\frac{n\pi}{\ln 3}\right)\ln(2+x)\right]\quad(n=1,2,3,\cdots)$

(3) $\lambda_n=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}+\left(\frac{n\pi}{\ln 2}\right)^2\right],$

$u_n(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}\sin\left[\frac{n\pi}{\ln 2}\ln(1+x)\right]\quad(n=1,2,3,\cdots)$

5. $x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^n-1}{n^2}\right]\cos nx$

6. $x^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\alpha_n J_1^2(\alpha_n)}\left(1-\frac{4}{\alpha_n^2}\right)J_0(\alpha_n x)$

7. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\alpha_n)}{2\alpha_n J_1^2(2\alpha_n)}J_0(\alpha_n x)$

14. $u(r,\theta)=4r^2p_2(\cos\theta)=2r^2(3\cos^2\theta-1)$

15. $u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n p_n(\cos\theta)$，其中

$$c_0 = \frac{A}{2}\int_{\cos\alpha}^{1} |\mathrm{d}x = \frac{A}{2}(1 - \cos\alpha)$$

$$c_1 = \frac{3A}{2}\int_{\cos\alpha}^{1} x\mathrm{d}x = \frac{3A}{4}(1 - \cos^2\alpha)$$

$$c_2 = \frac{5A}{2}\int_{\cos\alpha}^{1} \frac{1}{2}(3x^2 - 1)\mathrm{d}x = \frac{5A}{4}(\cos\alpha - \cos^3\alpha)\cdots$$

16. $u(\rho,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n)} J_2(\mu_n)\cos\frac{\mu_n}{R}at J_0\left(\frac{\mu_n}{R}\rho\right)$

17. $u(\rho,z) = 2R^2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\frac{\mu^{(0)}n}{R}\rho)\mathrm{sh}\,\frac{\mu^{(0)}}{R}z}{\mu_n^{(0)}J_1(\mu_n^{(0)})\mathrm{sh}\,\frac{\mu^{(0)}-1}{R}}\left[1 - \frac{4}{(\mu_n^{(0)})^2}\right]$

习　题　五

1. $u(\bar{\rho},\bar{\theta}) = F(\bar{\rho},\bar{\theta}) + v(\bar{\rho},\bar{\theta})$，其中

$$F(\bar{\rho},\bar{\theta}) = -\frac{2f(\pi)}{\pi}\mathrm{arctg}\,\frac{\bar{\rho}\sin\bar{\theta}}{\bar{\rho}\cos\bar{\theta} - \bar{a}} - \frac{2f(0)}{\pi}\mathrm{arctg}\,\frac{\bar{\rho}\sin\bar{\theta}}{\bar{\rho}\cos\bar{\theta} + \bar{a}}$$

$$v(\bar{\rho},\bar{\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\bar{a},\bar{\theta})\frac{\bar{a}^2 - \bar{\rho}}{\bar{\rho}^2 + \bar{a}_2 - 2\bar{a}\bar{\rho}\cos(\bar{\theta} - \theta)}\mathrm{d}\bar{\theta}$$

2. $u(r,\theta) = \frac{u_0}{2}\left[1 + \frac{3}{2}rp_1(\cos\theta) - \frac{7}{8}r^3p_3(\cos\theta) + \frac{11}{16}r^5p_5(\cos\theta) + \cdots\right]$

3. $u(x,y) = \beta\frac{\mathrm{sh}\,\frac{\pi a}{b}\mathrm{ch}\,\frac{\pi x}{b} - \mathrm{ch}\,\frac{\pi a}{b}\mathrm{sh}\,\frac{\pi x}{b}}{\mathrm{sh}\,\frac{\pi a}{b}}\sin\frac{\pi y}{b} = B\frac{\mathrm{sh}\,\frac{\pi(a-x)}{b}}{\mathrm{sh}\,\frac{\pi a}{b}}\sin\frac{\pi y}{b}$

4. $u(x,y) = \frac{Abx}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2Ab[(-1)^n - 1]}{n^2\pi^n\mathrm{sh}\,\frac{an\pi}{b}}\mathrm{sb}\,\frac{n\pi x}{b}\cos\frac{n\pi y}{b}$

5. $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2A}{n\pi}\mathrm{e}^{-\frac{n\pi}{a}y}\sin\frac{n\pi}{a}x$

6. 当 $r > R$：$u_1(r,\theta) = \frac{E}{r}[p_0(\cos\theta) - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2 p_2(\cos\theta)$

$+ \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{R}{r}\right)^4 p_4(\cos\theta) - \cdots]$

当 $r < R$：$u_2(r,\theta)$

$= \frac{E}{R}[p_0(\cos\theta) - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2 p_2(\cos\theta) + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{r}{R}\right)^4 p_4(\cos\theta) - \cdots]$

7. $u(r,\theta)=a^2-r^2$

8. $u(x,y)=-\frac{1}{12}xy(x^2+y^2-a^2)$

9. $u(r)=\frac{Bb-Aa}{b-a}+\frac{(A-B)ab}{(b-a)r}=\frac{Bb}{r}\frac{r-a}{b-a}+\frac{Aa}{r}\frac{b-r}{b-a}$

10. 当 $r\leqslant a$ 时，$u_1(r,\theta)=-\frac{3E_0}{k+2}r\cos\theta$

当 $r\geqslant a$ 时，$u_2(r,\theta)=-E_0r\cos\theta+E_0a^3\frac{k-1}{k+2}r^{-2}\cos\theta$

12. $u(r,z)=\frac{2}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{n\pi}{h}ir\right)}{J_0\left(\frac{n\pi}{h}iR\right)}\int_0^h f(z)\sin\frac{n\pi}{h}z\mathrm{d}z\cos\frac{n\pi}{h}z$

13. (1) $u(x,y)=\frac{A}{a}x$

(2) $u(r,\varphi)=A+\frac{\beta}{a}r\sin\varphi$

(3) $u=\frac{A}{a}x+\frac{A}{4}(x^2+y^2-a^2)$

(4) $u=A+\frac{\beta}{a}r\sin\varphi+\frac{A}{12}xy(x^2+y^2-a^2)$

14. (1) $u=\frac{15}{4}+\frac{x^2+y^2}{4}$

(2) $u=\frac{53}{6}+\frac{x^2+y^2+z^2}{6}$

(3) $u=\frac{17}{9}+\frac{1}{9}(x^2+y^2)^{3/2}$

15. (1) $u=\frac{Aa^2b^2}{2b^2+6a^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)y$

(2) $u=\frac{q}{8D\left(\frac{3}{a^4}+\frac{2}{a^2b^2}+\frac{3}{b^4}\right)}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)^2$

习 题 六

6. $u(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{3}[1 + 2r^2(3\cos2\theta + 1)]$

7. (1) $u(\rho,\theta) = \frac{A}{a}\rho\cos\theta$,

(2) $u(\rho,\theta) = A + \frac{\beta}{a}\rho\sin\theta$

8. $u(x,y) = \frac{u_0}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} + \text{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)\right]$

9. $u(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_0^{+\infty} f(\xi)\left[\frac{1}{(\xi - x)^2 + y^2} - \frac{1}{(\xi + x)^2 + y^2}\right]\mathrm{d}\xi$

10. $u(M) = \frac{1}{4\pi R}\iint\limits_{\Gamma} \frac{\rho_1^2 - R^2}{(R^2 + \rho_1^2 - 2R\rho_1\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}s$

习 题 七

1. (1) $f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin\omega - \omega\cos\omega}{\omega^3}\cos\omega t\mathrm{d}\omega$

(2) $f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{(5 - \omega^2)\cos\omega t + 2\omega\sin\omega t}{25 - 6\omega^2 + \omega^4}\mathrm{d}\omega$

(3) $f(t) = \mathrm{e}^{-\beta t}\cos\lambda_0 t u(t)$,

(4) $f(t) = \mathrm{e}^{i\lambda_0 t} t u(t)$

3. $f_1(t) * f_2(t) = \begin{cases} 0 & t \leqslant 0 \\ \frac{1}{2}(\sin t - \cos t + \mathrm{e}^{-t}) & 0 < t \leqslant \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}(1 + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}) & t > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

4. $u(x,t) = \frac{\varphi(x - t) + \varphi(x + t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi$

5. $u = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\right)^3 \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4a^2 t}}\varphi(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta$

$\vec{r} = \{(\xi - x),(\eta - y),(\zeta - z)\}$

6. (1) $u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\mathrm{d}\zeta$

(2) $u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x - \xi)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\xi^2}{4at}\right)\mathrm{d}\zeta$

(3) $u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{At - \frac{(\xi - x)^2}{4}}$

7. (1) $F(s) = \frac{2}{4s^2 + 1}$　　(2) $F(s) = \frac{2}{s^3}$

(3) $F(s) = \frac{1}{s + 2}$　　(4) $F(s) = \frac{k}{s^2 - k^2}$

8. (1) $F(s) = \frac{s^2 + 2}{s(s^2 + 4)}$　　(2) $F(s) = \frac{2!}{s^3} + \frac{1}{(s-1)^2}$

9. (1) $f(t) = \frac{1}{ab} + \frac{1}{a - b}\left[\frac{e^{-at}}{a} - \frac{e^{-bt}}{b}\right]$

(2) $f(t) = \operatorname{sh} t - t$,　　(3) $f(t) = \frac{1}{2} e^{-t}(\sin t - t\cos t)$

(4) $f(t) = \frac{2(1 - \operatorname{ch} t)}{t}$

10. (1) $(tf) = \frac{1}{2}\sin 2t$　　(2) $f(t) = \frac{1}{6} t^3$

(3) $f(t) = \frac{3}{2} e^{3t} - \frac{1}{2} e^{-t}$

(4) $f(t) = 2e^{-2t}\cos 3t + \frac{1}{3} e^{-2t}\sin 3t$

11. (1) $y = \frac{1}{3}(e^{3t} - \cos 3t - \sin 3t)$

(2) $y(t) = te^t \sin t$　　(3) $y(t) = e^t$

(4) $\begin{cases} y(t) = 1 * F(t) - 2\cos t * F(t) \\ z(t) = -\cos t * F(t) \end{cases}$

12. (1) $\varphi(t) = \begin{bmatrix} \frac{3}{20} e^{5t} - e^{-t} - \frac{1}{4} e^t - \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} e^{5t} + e^{-t} - \frac{1}{2} e^t + \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

(2) $\varphi(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} - \frac{1}{4} e^{-3t} - \frac{3}{4} e^{-t} + \frac{1}{2} te^{-t} \\ -2e^{-2t} + \frac{3}{4} e^{-3t} + \frac{5}{4} e^{-t} - \frac{1}{2} + e^{-t} \\ 4e^{-2t} - \frac{9}{4} e^{-3t} - \frac{7}{4} e^{-t} + \frac{1}{2} te^{-t} \end{bmatrix}$

(3)

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} \cos t - 2\sin t + e^t(-4 - 2\eta_1 + 3\eta_2) + 3e^{2t}(1 + \eta_1 - \eta_2) \\ 2\cos t - 2\sin t + e^t(-4 - 2\eta_1 + 3\eta_2) + 2e^{2t}(1 + \eta_1 - \eta_2) \end{bmatrix}$$

13. $u(x,t)=\begin{cases}0 & t<\dfrac{x}{a}\\ f(t-\dfrac{x}{a}) & t>\dfrac{x}{a}\end{cases}$

4. $u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\omega^2}[(1-\cos\omega t)-(1-\cos\omega(t-\dfrac{x}{a}))] & t\geqslant\dfrac{x}{a}\\ \dfrac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t) & t<\dfrac{x}{a}\end{cases}$

15. (1) $u(x,y)=(1+\frac{1}{2}\sin y)x^2+\frac{1}{2}(e^x-1)y^2+(y-1)^2$

(2) $u(x,y)=1(1-e^x)\cos y+(1+x^3)e^x+y^2-1.$

16. $u(x,t)=6e^{-\frac{\pi^2}{4}t}\sin\frac{\pi}{2}x+3e^{-\pi^2 t}\sin\pi x$

17. (1) $u(x,t)=be^{-ht}-be^{-ht}\text{erfc}(\frac{x}{2a\sqrt{t}})$

(2) $u(x,t)=\frac{b}{2}t^2-\frac{b}{2}(t-\frac{x}{a})^2u(t-\frac{x}{a})$

(3) $u(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\sin(n-\frac{1}{2})x\int_0^t\int_0^\pi e^{[-(2n-1)^2(t-\tau)]}$

$\sin(n-\frac{1}{2})\xi g(\xi,\tau)d\xi d\tau$

习 题 八

1. 由题设 $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant t\leqslant 1, \omega=\frac{1}{2}$，差分格式稳定。作

$x_i=i\Delta x\quad(i=1,2,3,4,5)$

$t_j=j\Delta t\quad(j=0,1,2,\cdots,50)$

则有

$$\begin{cases}u_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i-1,j-1}+u_{i+1,j+1})\quad(i=1,2,3,4\quad j=1,2,\cdots,50)\\ u_{0,j}=u_{5j}=0\quad(j=1,2,\cdots,50)\\ u_{i,0}=x_i(1-x_i)=\frac{v}{5}(1-\frac{i}{5})\quad(v=1,2,3,4,5)\end{cases}$$

由此可得

$u_{0,0}=0$, $u_{1,0}=0.16$, $u_{2,0}=0.24$, $u_{3,0}=0.24$, $u_{4,0}=0.16$

$u_{5,0}=0$, $u_{1,1}=0.12$, $u_{2,1}=0.20$, $u_{3,1}=0.20$, $u_{4,1}=0.12$,

$u_{1,2}=0.10$ $u_{2,2}=0.16$, $u_{3,2}=0.16$, $u_{4,2}=0.10$

其余结点,类似计算

2. 由题设 $h=0.1$ 为步长,作

$$x_i=\frac{-1}{2}+ih,\ y_j=\frac{-1}{2}+jh\quad(i,j=0,1,2,\cdots,10)$$

再用异步迭代公式可得

$u_{11}=0.0000,\quad u_{2,1}=0.2500,\quad u_{3,1}=0.3125$

$u_{4,1}=0.3281,\quad u_{5,1}=0.3320,\quad u_{6,1}=6.3330$

$u_{7,1}=0.3333,\quad u_{8,1}=0.3333,\quad u_{9,1}=0.0833$

$u_{1,2}=-0.2500,\quad u_{2,2}=0.0000,\quad u_{3,2}=0.0781$

$u_{4,2}=0.1016,\quad u_{5,2}=0.1084,\quad u_{6,2}=0.1104$

$u_{7,2}=0.1109,\quad u_{8,2}=0.1111,\quad u_{9,2}=-0.2014$

共余结点可类似计算。

3. $\Phi_{ij}=\frac{1}{4}(\Phi_{i+1,j}+\Phi_{i-1,j}+\Phi_{i,j+1}+\Phi_{i,j-1})+\frac{1}{2}h^2GQ$

$\Phi_{ij}=0$ 当 $(x_i,y_i)\in\Gamma_h$

4. 作 $x_i=i\Delta x\quad(i=0,1,2,\cdots,N,N<x=1)$

$$t_j=j\Delta t\quad(j=0,1,2,\cdots)$$

且满足 $\omega=\frac{\Delta t}{\Delta t}\leqslant 1$,则有

$$\begin{cases}u_{i,j+1}=\omega^2(u_{i-1,j}+u_{i+1,i})+2(1-\omega^2)u_{ij}-u_{i,j-1}\\ \qquad\qquad(i=1,2,\cdots,N-1,j=1,2,3,\cdots)\\ u_{0,j}=u_{N,j}=0\quad(j=0,1,2,\cdots)\\ u_{i,0}=u_{i,1}=i\Delta x(1-i\Delta x)\quad i=1,2,\cdots,N\end{cases}$$

5. $y(x)=(1-x)(1-0.211x-0.783x^2+0.204x^3)$

6. $u(x,y)=\frac{5}{8a^2}(x^2-a^2)(y^2-a^2)$

(提示:设 $u(x,y)=k(x^2-a^2)(y^2-a^2)$)

参 考 书 目

[1] 复旦大学数学系编,数学物理方程,上海:人民教育出版社,1979.

[2] 梁昆淼编,数学物理方法(第二版),北京:高等教育出版社,1978.

[3] [美]Tyn Myint-U 著,徐元钟译,数学物理中的偏微分方程,上海:上海科学技术出版社,1983.

[4] 陈庆益、李志深编著,数学物理方程(第二版),北京:高等教育出版社,1986.

[5] 南京工学院数学教研组编,数学物理方程与特殊函数(第二版),北京:高等教育出版社,1982.

[6] 南京工学院数学教研组编,积分变换(第二版),北京:人民教育出版社,1982.

[7] 董光昌、陈仲慈、汤国祯编,数学物理方程,杭州:浙江大学出版社,1989.

[8] Л. В. КАнторович, В. И. Крылов 著,Прильиженные Метогы Высшеро Аиалижа, ГосугарствеиносИжгателвство Фижико-матсматической Литературы,Москва,1962. Ленинрраж.

[9] 王载舆编,数学物理方程及特殊函数,北京:清华大学出版社(第一版),1991.

[10] 李远玲、曾宪义、张毓明编,数学物理方程及其应用,北京:水利电力出版社,1987.

[11] R. 柯朗、D. 希尔伯特著,熊振翔等译,数学物理方法 Ⅱ,北京:科学出版社,1981.

[12] R. 柯朗、D. 希尔伯特著,钱敏等译,数学物理方法 Ⅰ,北京:科学出版社,1981.